MICKAELLAUNAY

MARELE ROMAN**AL** MATEMATICI I

DIN PREISTORIE
ÎN ZILELE NOASTR
E M I C K A E L L
A U N A Y

MAR
ELE

ROMAN AL

MATEMATICII

DIN PREISTORIE ÎN ZILELE NOASTRE

Traducere din limba franceză de **Pompiliu Alexandru**

A

1

TRei
Editori:
Silviu Dragomir Vasile
Dem. Zamfirescu
Director editorial:
Magdalena Mărculescu
Redactare:
Carmen Eberhat, Tudor
Călin Zarojanu
Ilustraţie şi design
copertă: Andrei Gamarţ
Director producţie:
Cristian Claudiu Coban

Dtp:
Carusel Multimedia
Corectură: Irina Muşătoiu Dusa Udrea-Boborel
Conţinutul acestei lucrări electronice este protejat prin copyright (drepturi de autor), iar cartea este destinată exclusiv utilizării ei în scop privat pe dispozitivul de citire pe care a fost descărcată. Orice altă utilizare,

incluzând împrumutul sau schimbul, reproducerea integrală sau parţială, multiplicarea, închirierea, punerea la dispoziţia publică, inclusiv prin internet sau prin reţele de calculatoare, stocarea permanentă sau temporară pe dispozitive sau sisteme cu posibilitatea recuperării informaţiei, altele decât cele pe care a fost descărcată, revânzarea sub orice formă sau prin orice

mijloc, fără consinţământul editorului, sunt interzise. Dreptul de folosinţă al lucrării nu este transferabil. Drepturile de autor pentru versiunea electronică în formatele existente ale acestei lucrări aparţin persoanei juridice Editura Trei SRL.
Titlul original: Le grand roman des maths. De la préhistoire à nos jours
Autor: Mickaël Launay

Copyright © Editions Flammarion, 2016
Copyright © Editura Trei, 2021 pentru prezenta ediţie
O.P. 16, Ghişeul 1, C.P. 0490, Bucureşti Tel.: +4 021 300 60 90 ; Fax: +4 0372 25 20 20 e-mail: comenzi@edituratrei.ro
www .ed itu ratrei. ro
ISBN (prinţ): 978-606-40-0625-7 ISBN (PDF): 978-606-40-1171-8

Cuprins

1. Matematicieni, fără să vrea.....11
2. Şi a apărut numărul 26
3. Nimeni nu intră aici dacă nu este geometru.....41

4. Epoca teoremelor 57
5. Un pic de metodă 78
6. De la n la şi mai şi 92
7. Nimic şi mai puţin decât nimic……108

8. Puterea triunghiurilor.....122
9. Spre o necunoscută 142
10. Şiruri.....155
11. Lumile imaginare 167
12. Un limbaj pentru matematică.....183

13. Alfabetul lumii 202
14. Infinitul mic….217
15. Măsurarea viitorului……232
16. Apariţia maşinilor 252
17. Matematicile viitorului……271
18. Epilog……291

19. Pentru a merge mai departe.....295
Bibliografie 299- Din păcate, mereu am fost slabă la matematică!

Sunt puţin cam descurajat Cred că este a zecea oară

când aud această
frază pe ziua de azi.
Şi totuşi, iată că
a trecut mai mult de
un sfert de oră de
când această
doamnă s-a oprit la
standul meu, printre
alţi trecători, si

ascultă atent cum prezint diverse curiozităţi geometrice. Şi în acest moment a venit lovitura de graţie:

— De fapt, cu ce vă ocupaţi

dumneavoastră? m-a întrebat ea.

— Sunt matematician.

— Din păcate, mereu am fost slabă la matematică!

— Chiar asa? Cu toate astea, ceea ce

povesteam părea că vă interesează.

— Da... dar aici nu e vorba chiar de matematică... înțeleg ceea ce spuneți.

Hopa, pe asta nu am mai auzit-o până acum. Matematica

ar fi, prin definiţie, o disciplină pe care nu o putem înţelege?

Suntem la începutul lui august, pe strada Félix Faure, la Flotteen-Ré. în acest mic târg estival, am la

dreapta mea un
stand de tatuaje cu
hena si şuviţe
africane, la stânga
— un vânzător de
accesorii pentru
telefoane mobile, iar
în faţa mea, o tarabă
cu bijuterii si

gablonzuri de toate
felurile. între toate
acestea, mi-am
instalat si eu standul
de matematică, în
răcoarea serii,
turiştii se perindă
liniştiţi. îmi place în
mod deosebit să fac

matematică în locuri
neobişnuite, mai
ales acolo unde
oamenii se aşteaptă
cel mai puţin să o
întâlnească, într-un
mediu unde nu sunt
inhibaţi...

— Când le-oi spune părinţilor că am făcut matematică în timpul vacanţei...,
îmi zice în treacăt un licean, venind de la plajă.

E adevărat, nu iau oamenii prea în serios, dar îi iau asa cum sunt. Unul dintre momentele mele preferate este să observ expresiile celor care se considerau

iremediabil certaţi
cu matematica,
atunci când le arăt
că tocmai au făcut
matematică timp de
un sfert de oră. Iar
standul meu nu se
goleşte! Le prezint
origami, magie,

jocuri, enigme... Am de toate, pentru toate gusturile si pentru toate vârstele.

Mă distrez, dar în adâncul meu sunt dezamăgit. Cum s-a ajuns, oare, ca

oamenii să nu-si dea seama că a face matematică poate fi o plăcere? De ce cuvântul „matematică” generează atâta frică? Cu siguranţă că, dacă as fi pus

deasupra mesei o
pancartă pe care as
fi scris
„Matematică” — asa
cum sunt la
standurile din jurul
meu „Bijuterii si
coliere „Telefoane”
sau „Tatuaje” —, nu

as fi avut nici măcar
un sfert din succesul
pe care îl am.
Lumea nu s-ar fi
oprit. Poate că m-ar
fi ocolit, întorcând
privirea. Totuşi
curiozitate există.
Constat acest lucru

în fiecare zi. E adevărat că matematica provoacă frică, dar fascinează cu mult mai mult. Nu ne place, dar jinduim să ne placă! Sau, cel puţin, să fim

capabili să aruncăm
un ochi indiscret
spre miezul
misterelor sale
adânci. O
considerăm
inaccesibilă. Dar nu
este asa! Putem
foarte bine să iubim

muzica fără să fim
muzicieni sau să
apreciem o masă
gustoasă fără să fim
mari bucătari.
Atunci de ce ar
trebui să fii
matematician sau să
ai o inteligenţă

excepţională pentru a pleca urechea la povestea matematicii ori să-ţi gâdili spiritul cu algebra sau geometria? Nu e necesar să intri în detalii tehnice

pentru a înţelege
marile idei si pentru
a putea să te
minunezi de ele.

încă din negura
timpurilor au existat
numeroşi artişti,
creatori, inventatori,
artizani sau pur si

simplu visători si
curioşi care au făcut
matematică fără să
stie. Erau matema-
ticieni, în ciuda
tuturor aparenţelor!
Au fost primii care
au pus întrebări,
care au cercetat,

primii care si-au pus
mintea la treabă.
Dacă dorim să
înţelegem esenţa
matematicii, trebuie
să pornim pe urmele
acestora, căci cu ei
a început totul.

Aşadar, a venit timpul să începem călătoria. Dacă sunteţi de acord, permiteţi-mi ca în următoarele pagini să vă însoţesc prin hăţişurile uneia dintre disciplinele

cele mai fascinante si uimitoare pe care le-a creat specia umană. Să-i cunoaştem pe cei care au contribuit la istoria sa prin descoperiri

neaşteptate si idei fabuloase!

Să deschidem împreună

Marele roman al matematicii/ Matematicie

ni, fără să vrea

Revenit la Paris, am decis să deschid cercetarea noastră pornind din inima capitalei, de la muzeul Luvru. Să faci matematică la

Luvru? Asta ar putea
să pară cam
deplasat. Fosta
rezidenţă regală
este astăzi mai
degrabă domeniul
pictorilor,
sculptorilor, arhe-
ologilor sau

istoricilor decât al matematicienilor. Cu toate acestea, aici ne pregătim să căutăm primele urme matematice.

încă de la intrare ne întâmpină marea piramidă de sticlă

care tronează în
centrul curţii
Napoleon, iar asta
este deja o invitaţie
la geometrie. Dar
astăzi avem întâlnire
cu un trecut mult
mai îndepărtat. Intru
în muzeu şi maşina

timpului porneşte.
Merg prin faţa
regilor Franţei,
păşesc spre
Renaştere şi Evul
Mediu pentru a
ajunge, în sfârşit, la
Antichitate. Trec
dintr-o sală în alta,

întâlnesc câteva
statui romane, vaze
greceşti şi sarcofage
egiptene. Merg mai
departe. Iată că
intru în preistorie şi,
trecând prin secole,
încet-încet trebuie
să uit totul. Să uităm

numerele! Să uităm geometria! Să uităm scrierea! La început, nimeni nu ştia nimic. Nici măcar că ar exista ceva de cunoscut.

Prima oprire este în Mesopotamia:

iată-ne întorşi cu zece mii de ani în urmă!

Dacă mă gândesc mai bine, aş fi putut merge şi mai departe. Să parcurgem peste un milion de ani pentru

a ne regăsi în plin Paleolitic! Focul nu fusese încă domesticit în epoca aceea şi *Homo sapiens* nu era decât un proiect îndepărtat. Ne găsim pe teritoriul

lui *Homo erectus* în Asia, a lui *Homo ergaster* în Africa şi poate al câtorva rude ale acestora, care ar merita descoperite. Este epoca pietrei cioplite, iar la modă

este toporul din piatră.

într-un colţ al taberei, cioplitorii se află la muncă. Unul dintre aceştia ia o bucată de silex, încă în formă brută, aşa cum a găsit-o cu

câteva ore mai
devreme. Se aşază
direct pe pământ —
probabil cu
picioarele în-
crucişate —, pune
piatra jos, o ţine cu
o mână, iar cu
cealaltă îi loveşte

marginea cu o altă
piatră mai mare.
Sare o primă aşchie
din ea. Omul
observă rezultatul,
răsuceşte silexul şi îl
loveşte a doua oară
în altă parte.
Primele două aşchii

fiind astfel
îndepărtate, lasă în
loc o muchie tăioasă
pe marginea
silexului. Nu rămâne
decât să repete
operaţiunea pe toată
circumferinţa
pietrei, în câteva

locuri, silexul este
prea gros sau prea
mare şi trebuie să-i
fie îndepărtate
părţile în plus
pentru a da
obiectului final
forma dorită.

Acest lucru se întâmplă deoarece forma toporului nu este lăsată la întâmplare şi nici conform inspiraţiei de moment. Forma aceasta este gândită, prelucrată,

transmisă din
generaţie în
generaţie. Şi ca
atare, se găsesc
diferite modele în
funcţie de epoca şi
locul fabricării lor.
Uneori au forma
unei picături de apă

cu un vârf proeminent, alteori sunt mai rotunjite şi au profilul unui ou, în timp ce unele se aseamănă foarte mult cu un triunghi isoscel cu laturile uşor bombate.

Topor din Paleoliticul inferior

Indiferent de formă, toate aceste obiecte au un punct comun: o axă de simetrie. Să fi ajuns strămoşii noştri la această geometrie din motive practice

sau au ales aceste forme doar din considerente estetice? E greu de ştiut acest lucru. Sigur este că această simetrie nu poate fi rezultatul întâmplării.

Cioplitorul trebuia
să-şi premediteze
loviturile. Adică
trebuia să
gândească forma
finală înainte de a o
realiza. Era necesar
să-şi construiască o
imagine mentală,

abstractă a
obiectului care
trebuia realizat. Cu
alte cuvinte, trebuia
să facă matematică.

După ce a
terminat, cioplitorul
îşi observă noua
unealtă, o priveşte
în lumină pentru a-i
vedea mai bine
curbele, reajustează
câteva muchii prin
două sau trei lovituri

suplimentare şi iată-l, în sfârşit, mulţumit. Ce simte, oare, în acest moment? Trăieşte el deja acea exaltare formidabilă pe care o dă creaţia ştiinţifică? Adică are

acel presentiment că
ştie, prin
intermediul unei idei
abstracte, cum să
înţeleagă şi cum să
prelucreze lumea
exterioară?
Dar nu prea
contează asta acum;

încă nu a sosit
timpul marilor
revelaţii ale
abstractizării.
Vremurile acelea
aparţin
pragmatismului.
Toporul va fi utilizat
pentru a doborî

copacii, pentru a tăia carnea, pentru a găuri pieile sau pentru a săpa pământul.

Şi totuşi nu vom merge chiar atât de departe. Să lăsăm să doarmă acele

timpuri străvechi şi
aceste interpretări
poate prea
îndrăzneţe, pentru a
reveni la ceea ce va
fi adevăratul punct
de plecare al
aventurii noastre:
regiunea

mesopotamiană a celui de-al VlII-lea mileniu înaintea erei noastre.

De-a lungul Cornului Abundenţei[I],

I Regiune fertilă din Orientul Apropiat, creată

revoluţia neolitică a pornit din zona care acoperă aproape întreg teritoriul ce se va numi mai

---

de albiile râurilor Eufrat şi Tigru, delimitată de Deşertul Sirian la sud şi de ţinutul muntos din Anatolia la nord.

târziu Irak. De la un timp, oamenii au început să-şi construiască aici aşezări. Pe platourile din nord, sedentarizarea era deja un succes. întreaga regiune

devine laboratorul
noilor invenţii.
Locuinţele din
chirpici formează
primele sate şi
constructorii cei mai
îndrăzneţi îşi fac
deja case cu un etaj.
Agricultura devine

tehnologie de vârf. Climatul generos permite cultivarea pământului fără a fi nevoie de sisteme artificiale de irigaţii. Treptat, se cultivă plante şi sunt domesticite animale.

Asistăm la momentul
în care apare
olăritul.

Ia te uită, vorbim
deja despre olărit!
Chiar dacă multe
mărturii au dispărut
în legătură cu aceste
epoci pierdute

iremediabil în
hăţişurile timpului,
arheologii încă fac
mii de descoperiri:
vase, vaze, urcioare,
platouri, boluri... în
jurul meu vitrinele
sunt pline cu aceste
obiecte. Primele

datează de acum 9 000 de ani şi, trecând dintr-o sală în alta, suntem conduşi de-a lungul secolelor, precum pietrele din *Petit PouceP.* Sunt obiecte de toate mărimile şi

de toate formele,
divers decorate,
sculptate, pictate
sau gravate. Unele
au picioare, altele au
anse. Există
exponate intacte,
unele crăpate, altele
sparte, reconstituite.

Sunt şi unele din care nu au rămas decât câteva fragmente împrăştiate.

Ceramica este prima artă care foloseşte focul, cu mult înaintea

bronzului, a fierului
sau a sticlei. Plecând
de la argilă, această
pastă de pământ
maleabilă, care se
găseşte din
abundenţă în zonele
umede, artizanii
olari pot să prelu-

creze obiectele după
bunul lor plac.
Atunci când le
convine forma
căpătată de obiect,
nu mai trebuie decât
să-l lase la uscat
câteva zile, apoi să-l
ardă la foc puternic,

pentru a se întări. Tehnica este cunoscută de mult timp. încă de acum 20000 de ani se făceau statuete de mici dimensiuni. Odată cu sedentarizarea,

oamenilor le-a venit ideea de a crea obiecte pentru traiul de zi cu zi. Noul mod de viaţă impune nevoia de depozitare şi astfel se fabrică oale pentru treburile casnice.

Recipientele din pământ ars devin rapid obiecte indispensabile vieţii de zi cu zi şi necesare organizării colective a comunităţii. Mai

mult, cu toate că vesela nu rezistă / [I] în timp, ea trebuie să fie frumoasă. în curând, ceramica va fi pictată şi astfel

---

I *Tom Degeţel,* povestire de tradiţie orală, culeasă şi făcută celebră de către Charles Perrault *(N.r.).*

apar diverse şcoli. Unele imprimă motive în argila încă proaspătă, cu ajutorul unei cochilii sau a unei simple rămurele. Altele, mai întâi ard vasele şi apoi le decorează cu ajutorul pietrelor şlefuite. Iar alte şcoli pictează

obiectele cu pigmenţi naturali.

Parcurgând sălile dedicate antichităţilor orientale, sunt izbit de bogăţia motivelor geometrice imaginate de

mesopotamieni. La fel ca în cazul topoarelor vechiului nostru cioplitor în piatră, anumite simetrii sunt mult prea ingenioase pentru a ne gândi că nu au fost premedi-

tate. îmi atrag în mod special atenţia frizele care ornează marginile acestor vaze.

Frizele sunt acele benzi orizontale, prezentând un motiv

identic care se
repetă pe toată
circumferinţa va-
sului. Printre cele
mai întâlnite sunt
cele care au formă
triunghiulară şi sunt
dispuse precum
dinţii de fierăstrău.

Se găsesc, de asemenea, frize cu două fire care se înfăşoară unul în jurul celuilalt. Urmează frizele în spic, frizele în nişe pătrate, în romburi ascuţite, în

triunghiuri haşurate,
în cercuri
intersectate...

Trecând de la o epocă la alta, apar diferite mode. Anumite motive sunt foarte populare. Acestea sunt re-

luate, transformate,
îmbunătăţite în
multiple variante.
Câteva secole mai
târziu, iată-le
abandonate şi
devenind *has been,*
fiind înlocuite de
altele, mai la modă.

Le privesc cum defilează, iar ochiul meu de matematician se trezeşte. Văd în aceste frize simetrii, rotaţii, translaţii. Atunci încep mental să le triez, să le aranjez.

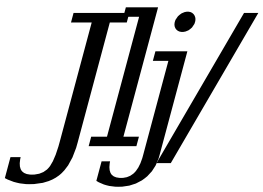
Câteva teoreme din
anii de studiu îmi
revin în memorie.
Iată de ce am
nevoie: de
clasificarea
transformărilor
geometrice, îmi scot
un carnet şi un

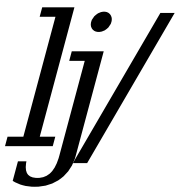
creion şi încep să mâzgălesc.

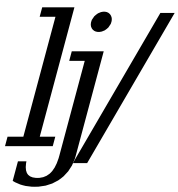
Mai întâi există rotatiile. Am exact în fata ochilor o *t t* friză compusă din elemente imbricate, în formă de „S”. îmi

răsucesc capul
pentru a mă
convinge. Da, este
sigur, aceasta este
invariabilă la o
semirotatie. Dacă as
lua ur- ciorul şi l-aş
răsuci cu gura în jos,

forma frizei ar
rămâne
exact aceeaşi.
;







Apoi există
simetriile. Acestea
sunt de mai multe
tipuri. Puţin câte

puţin, îmi completez
lista şi încep o
vânătoare de
comori. Pentru
fiecare transformare
geometrică sunt în
căutarea frizei
corespunzătoare.
Trec dintr-o sală

într-alta, revin pe
urmele mele...
Anumite obiecte
sunt deteriorate şi
trebuie să mijesc
ochii pentru a
încerca să
reconstitui motivul
încrustat pe această

argilă acum câteva
mii de ani. Când
găsesc un motiv nou,
îl bifez. Privesc
datele pentru a
încerca să
reconstitui
cronologia apariţiei
lor.

Oare cam câte ar trebui să găsesc în total? Gândin- du-mă puţin, reuşesc, în sfârşit, să ajung la această faimoasă teoremă. Găsesc în total şapte categorii valabile. Şapte

grupe de
transformări
geomerice diferite
care pot să lase
motivele invariabile.
Niciuna în plus,
niciuna în minus.
Bineînţeles că
acest lucru nu era

ştiut de mesopotamieni. E şi normal: teoria despre care este vorba nu va fi formalizată decât începând cu Renaşterea. Cu toate acestea, fără să se îndoiască de

acţiunile lor si fără
altă pretenţie în
afară de aceea de a-
şi decora vasele cu
linii armonioase şi
originale, aceşti
olari preistorici erau
pe cale să realizeze
primele

raţionamente ale unei discipline fantastice care va agita o întreagă comunitate de matematicieni câteva mii de ani mai târziu.

Mă uit peste notiţele mele şi

constat că le-am
inventariat aproape
pe toate. Oare? Una
dintre cele şapte
frize încă îmi scapă.
Mă aşteptam la
acest lucru, căci
este în mod evident
cea mai complicată
din listă. Caut o friză

care întoarsă pe
orizontală ar arăta la
fel, dar decalată cu
jumătatea lungimii
unui motiv. Astăzi o
numim simetrie prin
alunecare. O
adevărată provocare
pentru mesopota-
mienii noştri. /

Totuşi sunt încă departe de a fi parcurs toate sălile, aşadar nu-mi pierd speranţa. Căutarea continuă. Observ si cel mai mic detaliu, si cel mai

mic indiciu. Cele
sase
categorii, cele pe
care deja le-am
observat, se
acumulează, în
carnetul meu apar
date, scheme şi alte

mâzgăleli care se amestecă. în ciuda tuturor acestora, tot nu găsesc ni- ciun semn al celei de-a şaptea frize misterioase.

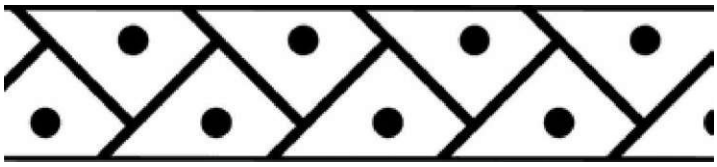
Deodată, simt un val de adrenalină. în

spatele unei vitrine,
tocmai observ un
obiect cu o înfăţişare
destul de jalnică, un
simplu fragment.
Totuşi, de sus în jos,
patru frize parţiale,
dar vizibile se
suprapun, iar una

dintre ele îmi atrage brusc atenţia. Cea de-a treia. Este compusă din fragmente asemenea unor dreptunghiuri înclinate care se întretaie în formă de spic. Clipesc de

emoţie. Observ atent
motivul şi îl desenez
repede în carnet ca
şi cum mi-ar fi frică
să nu dispară de sub
ochii mei. Este
geometria pe care o
caut. Este vorba
despre simetria prin

alunecare. Cea de-a şaptea friză a fost demascată.



Alături de obiect, indicaţia spune:

Fragment de ceaşcă cu decoraţiune orizontală de benzi si romburi ascuţite - mijlocul celui de-al V-lea mileniu înainte de Hristos.

O reaşez mental în cronologia mea.

Mijlocul mileniului V
înainte de Hristos.
Ne aflăm încă în
preistorie. Cu mai
mult de o mie de ani
înainte de
inventarea scrierii,
iar olarii
mesopotamieni

listaseră deja, fără
să ştie, toate
cazurile unei
teoreme care nu va
fi enuntată si de-
t
r
monstrată decât
şase mii de ani mai
târziu.

Câteva săli mai încolo întâlnesc un vas cu trei anse, care intră în clasament la cea de-a şaptea categorie. Chiar dacă motivul s-a transformat în spirală, structura

geometrică rămâne
aceeaşi. Puţin mai
încolo, un altul. As
vrea
ti '/
să merg mai
departe, dar,
deodată, decorul se
schimbă şi iată-mă

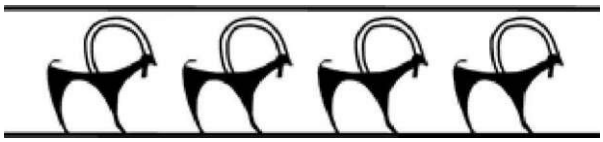
ajuns la capătul
colecţiilor orientale.
Dacă aş continua să
merg, aş ajunge în
Grecia. Arunc o
ultimă privire peste
notiţele mele.
Frizele cu simetrie
alunecată se numără

pe degetele de la o mână. Mă trec căldurile.

Cum recunoaştem cele şapte categorii de frize?

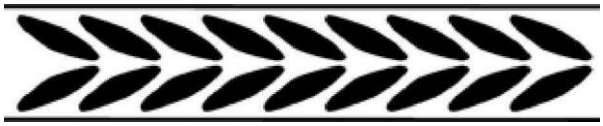
Prima categorie este cea a frizelor care nu au nicio proprietate geometrică particulară. Pur şi simplu, un motiv care se repetă fără nicio simetrie sau

centru de rotaţie. Este mai ales cazul frizelor care nu se bazează pe figuri geometrice, ci pe desene figurative, precum cele de animale.



A doua categorie le cuprinde pe cele pentru care linia orizontală ce taie friza în două părţi

devine o axă de
simetrie.



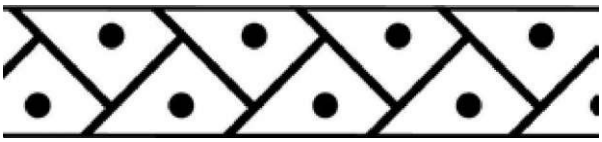
A treia categorie
grupează frizele
care au o axă de
simetrie verticală,

caz în care friza
constă într-un motiv
care se repetă pe
orizontală, iar axele
de simetrie pe
verticală se repetă si
ele.
A patra categorie
este cea a frizelor

invariabile printr-o rotaţie la 180 de grade. Fie că priviţi aceste frize normal, fie cu capul în jos, veţi vedea mereu acelaşi lucru.
A cincea categorie este cea a simetriilor

prin alunecare. Este vorba despre faimoasa categorie pe care tocmai am descoperit-o în zona Mesopotamiei. Dacă răsuciţi una dintre aceste frize pe o axă de simetrie

orizontală (aceeaşi
ca în cazul celei de-a
doua categorii),
atunci friza obţinută
se aseamănă, dar o
găsim decalată cu
lungimea unei
jumătăţi de motiv.

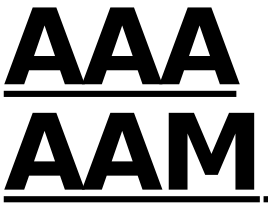


Celor de-a şasea şi
de-a şaptea categorii
nu le corespund noi
transformări
geometrice, ci

regăsim aici combinate mai multe proprietăţi întâlnite în categoriile anterioare. Astfel, frizele celei de-a şa-sea categorii sunt cele care au

totodată o simetrie orizontală, una verticală şi un centru de rotaţie cu 180 de grade.

în ceea ce priveşte a
şaptea categorie,
aceasta conţine frize
care au simetrie
verticală, un centru
de rotatie si o
simetrie prin
alunecare.



Ceea ce trebuie să
reţinem este că
aceste categorii nu

privesc decât
structura
geometrică a frizelor
şi nu ne împiedică să
realizăm câteva
variaţii în forma
motivelor. Astfel,
următoarele frize, cu
toate că sunt dife-

rite, aparţin în
totalitate celei de-a
şaptea categorii.

ăi

aflA

AAA

P

ra

mAşadar, toate frizele pe care le putem imagina aparţin uneia dintre cele şapte categorii. Orice altă combinaţie este geometric imposibilă. Curios

este faptul că
ultimele două
categorii sunt cel
mai frecvent
întâlnite. în mod
spontan, este mai
uşor să desenezi
figuri având multe
simetrii, decât figuri

care au puţine simetrii.

încântat de succesul meu mesopotamian, iată-mă a doua zi gata să încep asaltul Greciei Antice. Nici nu am sosit bine şi nu mai

ştiu încotro să întorc
capul. Aici vână-
toarea frizelor este
un joc de copii. Mi-a
fost de ajuns să fac
câţiva paşi şi să dau
peste câteva vitrine
cu amfore negre cu
figuri roşii pictate,

pentru a-mi regăsi
lista celor şapte
frize.
în fata unei
asemenea
abundente de
motive, renunţ
destul de repede să
mai ţin socoteala,
aşa cum am făcut-o

cu Mesopotamia. Creativitatea acestor artişti mă uimeşte. Noi motive îşi fac apariţia, mereu mai complexe şi mai ingenioase. De mai multe ori trebuie să mă opresc şi să mă

concentrez pentru a
dezlega mental iţele
care se înlănţuie şi
se amestecă în jurul
meu.

în colţul unei
săli, un lutrofor cu
figuri roşii mă lasă
fără glas.

Un lutrofor este un vas alungit, cu două toarte, cu care se transportă apa pentru baie. Cel de aici are aproape un metru înălţime. Frizele sunt prezente şi încep să

le aşez pe categorii.
Una. Două. Trei.
Patru. Cinci. în
câteva secunde
identific cinci dintre
cele şapte structuri
geometrice. Vasul
este prins de perete
şi, aplecându-mă

puţin, constat că o a
şasea categorie se
găseşte pe partea
ascunsă a obiectului.
îmi mai lipseşte una
singură. Ar fi prea
frumos să o găsesc
şi pe aceasta!
Uimitor, cea care

lipseşte nu este cea
de data trecută.
Timpurile s-au
schimbat, la fel şi
moda, şi nu mai este
simetria prin
alunecare singura
care lipseşte, ci
combinaţia dintre

simetria verticală,
simetria prin rotaţie
şi simetria prin
alunecare.

O caut frenetic,
mă uit atent la
fiecare colţişor al

obiectului. Nu o găsesc. Puţin dezamăgit, mă pregătesc să renunţ, dar privirea îmi este atrasă de un detaliu. în centrul vasului este reprezentată o scenă cu două per-

sonaje. La o primă privire nu pare să existe o friză în acest loc. Cu toate acestea, în josul imaginii şi în dreapta scenei, un obiect îmi atrage atenţia: un vas pe

care se sprijină
personajul central.
Un vas desenat pe
un vas! Această
mise en abyme[I] mă

I Punere în abis, tehnică prin care se plasează o imagine în ea însăşi, apărută în heraldica

face să zâmbesc.
Mijesc ochii,
imaginea este puţin
deteriorată, dar este
neîndoielnic că acest

---

medievală şi generalizată ulterior de către André Gide, începând cu 1893. *(N.r.)*

vas desenat are el
însuşi o friză şi...
minune! — este
vorba despre cea
care îmi lipseşte!
    în ciuda
eforturilor mele
repetate, nu am mai
găsit niciun alt

obiect cu aceeaşi particularitate. Acest lutrofor pare a fi singurul de felul său în colecţia Luvrului. Este singurul care are cele şapte categorii de frize.

O altă surpriză mă aşteaptă ceva mai încolo. Frize în 3D! Şi eu care credeam că perspectiva e o invenţie a Renaşterii! Zone întunecate şi clare,

dispuse cu măiestrie
de artist, creează un
joc de umbre şi
lumină dând un
efect de volum
formelor geometrice
care se desfăşoară
pe circumferinţa

acestui recipient imens.

Cu cât înaintez mai mult, cu atât îmi vin în minte noi întrebări. Anumite obiecte nu sunt acoperite cu frize, ci cu pavaje. Cu alte

cuvinte, motivele
geometrice nu mai
sunt suficiente
pentru a umple
banda fină care în-
conjoară obiectul, ci
pun stăpânire pe
toată suprafaţa
acestuia, înmulţind

astfel posibilităţile combinaţiilor geometrice.

După greci, vin egiptenii, etruscii şi romanii. Descopăr iluzii de dantele cioplite direct în piatră. Liniile tăiate

se întrepătrund, trec
pe rând pe deasupra
şi pe dedesubtul lor
într-o înlănţuire
perfect ordonată.
Apoi, ca şi cum
operele nu sunt
suficiente, mă
surprind observând

Luvrul însuşi.
Privesc la plafoane,
la pavaje, la cadrele
uşilor. Pe drum spre
casă am impresia că
nu mă mai pot opri.
Pe stradă observ
balcoanele clădirilor,
motivele de pe

îmbrăcămintea trecătorilor, zidurile culoarelor de la metrou...

Este suficient să schimbi modul în care priveşti lumea pentru a vedea cum

apare imediat
matematica.
Căutarea ei este
fascinantă si fără de
sfârsit.

Şi aventura de-
abia acum începe

.Şi a apărut numărul

în acele timpuri, în Mesopotamia, lucrurile mergeau cum nu se poate mai bine. La sfârşitul celui de-al patrulea mileniu înaintea erei noastre, micile sate pe care
le-am lăsat în urmă s-au metamorfozat în oraşe înflori-
toare. Unele au deja mai multe zeci de mii de locuitori. Tehnologiile se dezvoltă aşa cum nu s-a mai văzut înainte. Fie că este vorba despre arhitecţi, bijutieri, olari, ţesători, tâmplari sau sculptori, artizanii trebuie să facă dovada unei ingeniozităţi crescânde pentru a pune în valoare provocările tehnice cu care se confruntă. Cu toate acestea, metalurgia nu este încă pusă la punct, dar se lucrează în acest sens.

Încet-încet se dezvoltă o reţea de drumuri în toată regiunea. Schimburile culturale şi comerciale se multiplică. Se creează ierarhii din ce în ce mai complexe şi *Homo sapiens* descoperă bucuriile oferite de administraţie. Toate aceste lucruri cer o organizare exemplară! Pentru a pune puţină ordine în această lume complexă a sosit marele moment al inventării scrierii, iar cu această ocazie specia noastră a intrat în istorie. în revoluţia care se pregăteşte, matematica joacă un rol de avangardă.

Urmând cursul Eufratului, părăsim platourile nordice care au văzut naşterea primelor sate

sedentarizate şi luăm direcţia regiunii Sumerului, care acoperă câmpiile
Mesopotamiei de Jos. Aici, în stepele sudice, este locul în care se adună de acum înainte principalele concentrări de populaţie. De-a lungul fluviului întâlnim oraşe precum Kish, Nippur şi Shuruppak. Aceste oraşe sunt încă
tinere, dar secolele care se deschid în fata lor anunţă mari
perioade de grandoare şi prosperitate.

Iată-ne deodată în fata Urukului, care se întrezăreşte
la orizont.

Oraşul Uruk este un furnicar uman care influenţează
întregul Orient Apropiat cu puterea şi cu prestigiul său. Construit în principal din cărămizi arse, oraşul îşi etalează nuanţele arămii pe mai mult de o sută de hectare, iar călătorul rătăcit poate cutreiera ore întregi pe străduţele sale aglomerate. în inima oraşului au fost clădite mai multe temple monumentale. Aici se celebrează An, tatăl tuturor zeilor, dar mai ales Inanna, zeiţa cerului. Pentru ea a fost construit templul Eanna, unde cea mai mare clădire măsoară optzeci de metri lungime şi treizeci de metri lăţime. Cum să nu rămână impresionaţi călătorii
în fata acestei minuni?!

Vara se apropie şi, ca în orice an în perioada aceasta, pe oraş pune stăpânire o agitaţie aparte.

Turmele de oi vor pleca în curând spre zonele de păşunat din nord, pentru a se întoarce la sfârşitul sezonului cald. De-a lungul mai multor luni, ciobanii vor avea grijă să păstorească bine animalele, să le asigure hrana şi protecţia, pentru a le reda în bună stare proprietarilor. Templul Eannei deţine el însusi mai multe turme, dintre care cele mai mari numără zeci de mii de capete. Convoaiele sunt atât de impresionante, încât unele dintre ele sunt însoţite de soldaţi pentru a le proteja de pericolele care apar în timpul transhumanţei.

Totuşi, nici nu se pune problema pentru proprietari să lase oile să plece fără să-şi fi luat câteva măsuri de precauţie. Contractul cu ciobanii este clar: trebuie să revină cu tot atâtea capete cu câte au plecat. Nu se pune problema de a lăsa să se piardă o parte din turmă sau de a da dispărute unele exemplare.

în cazul acesta apare o problemă: cum comparăm mărimea unei turme care a plecat cu cea care a revenit?

Pentru a răspunde la această întrebare, deja de câteva secole, a fost realizat un sistem de jetoane de argilă. Există mai multe tipuri de jetoane, fiecare corespunzând unuia sau mai multor obiecte sau animale după forma şi motivele care sunt inscripţionate pe ele. Pentru o oaie se desenează un simplu disc marcat cu o cruce. în momentul plecării se pune într-un recipient o cantitate de jetoane corespunzătoare

mărimii turmei. La revenire va fi suficient să se compare turma cu conţinutul recipientului pentru a verifica faptul că niciun animal nu lipseşte de la apel. Mult mai târziu aceste jetoane vor căpăta numele latin de *calculi,* adică „pietricele”, care vor da naştere cuvântului *calcul.*

Această metodă este practică, dar are un inconvenient. Cine păstrează jetoanele? Căci neîncrederea funcţionează în ambele direcţii. Ciobanii se pot teme la rândul lor că proprietarii mai puţin cinstiţi vor adăuga câteva jetoane în urnă în timpul absenţei lor. Proprietarii ar putea astfel să profite şi să ceară despăgubiri pentru oi care nu au existat niciodată.

Aşa că oamenii îşi bat capul şi în cele din urmă se ajunge la o soluţie. Jetoanele vor fi păstrate într-o minge de argilă ermetic închisă. în momentul închiderii, fiecare îşi pune semnătura pe suprafaţa bilei protectoare pentru a-i certifica autenticitatea. De acum încolo este imposibil să fie modificat numărul de jetoane fără a sparge bila. Ciobanii pot să plece liniştiţi.

Dar iată că din nou vine rândul proprietarilor să găsească inconveniente la această metodă. Pentru nevoile propriilor afaceri este necesar să cunoască în orice moment numărul animalelor deţinute. Cum se procedează în cazul acesta? Să ţină minte pe dinafară numărul oilor? Nu e la îndemână, când stim că limba sumeriană nu are încă termeni pentru a desemna numere atât de

mari. Să existe o dublă măsură de jetoane, nesigilate,
care să însumeze conţinuturile tuturor bilelor închise?
N-ar fi practic.

în sfârşit, o soluţie s-a găsit. Cu ajutorul unei tije de trestie ascuţite la capăt, se inscripţionează pe suprafaţa fiecărei bile desenul jetoanelor care se găsesc în interior, în felul acesta, devine posibilă consultarea în orice moment a conţinutul bilei, fără ca ea să fie spartă.

Această metodă pare să convină tuturor de acum încolo. Este folosită pe scară largă, nu doar pentru a număra oi, ci şi pentru a sigila tot felul de acorduri sau contracte. Cerealele - precum orzul sau grâul -, lâna şi textilele, metalul, bijuteriile, pietrele preţioase, uleiul sau vasele au propriile jetoane. Chiar şi impozitele sunt controlate cu ajutorul jetoanelor. Pe scurt, la sfârşitul celui de-al IV-lea mileniu, în Uruk orice contract valabil trebuia să fie sigilat într-o bilă închisă care conţinea jetoane de argilă.

Tot acest sistem funcţionează de minune si, într-o zi, încă o idee strălucită ia naştere. Este vorba de acea idee despre care ne întrebăm cum de nu am avut-o înainte, cea care este totodată genială şi simplă. Deoarece numărul animalelor este înscris pe suprafaţa bilei, la ce bun să continuăm să punem jetoane în interior? Şi la ce ne serveşte să continuăm să facem bile? Am

putea pur şi simplu să inscripţionăm imaginea jetoanelor pe orice bucată de argilă. Adică pe o tabletă aplatizată, de exemplu.

Iar acest lucru s-ar numi scriere.

Iată-mă revenit la Luvru. Colecţiile secţiunii de an-

tichităţi orientale stau mărturie pentru această poveste. Primul lucru care mă uimeşte în legătură cu aceste bile este mărimea lor. Sferele mici de argilă, pe care sumerienii le modelau simplist răsucindu-le în jurul degetului mare, nu sunt deloc mai mari decât o minge de ping- pong. Iar jetoanele nu depăşesc un centimetru.

Puţin mai încolo, iată că apar primele tablete; acestea se multiplică şi umplu repede vitrine întregi. Uşor-uşor scrierea se cizelează şi capătă înfăţişarea cuneiformă compusă din mici crestături în formă de cui. După dispariţia primelor civilizaţii ale Mesopotamiei, la începutul erei noastre, cea mai mare parte a acestor obiecte va dormi sub ruinele oraşelor pustiite, înainte de a fi scoase la lumină de arheologii europeni, începând cu secolul al XVII-lea. Ele vor fi progresiv descifrate de-a lungul secolului al XlX-lea.

Nici aceste tablete nu sunt prea mari. Unele dintre ele au mărimea unei cărţi de vizită, dar sunt acoperite cu sute de semne minuscule care se îngrămădesc unele în altele. Nu se pune problema pentru scribii mesopotamieni să lase vreo părticică de argilă nescrisă. Indicaţiile

muzeului, care se găsesc lângă aceste obiecte, îmi permit să interpretez simbolurile misterioase. Este vorba despre animale, bijuterii sau cereale.

Lângă mine, câţiva turişti fac fotografii cu... tabletele. Amuzantă farsă în care caruselul istoriei va purta scrierea pe atât de multe suporturi diferite, de la argilă la hârtie, trecând prin marmură, ceară, papirus sau pergament, şi care într-o ultimă apariţie va da tabletelor electronice forma strămoşilor lor de argilă. Punerea faţă în faţă a celor două obiecte are ceva cu adevărat impresionant. Cine ştie dacă peste cinci mii de ani aceste două tablete nu se vor regăsi unele lângă altele de aceeaşi parte a vitrinei?!

Timpul a trecut şi iată-ne acum la începutul celui de-al III-lea mileniu înaintea erei noastre. O etapă suplimentară a fost depăşită: numărul s-a eliberat de obiectul pe care îl numără! înainte, cu bilele de argilă şi primele tablete, simbolurile pentru numărare depindeau de obiectele luate în considerare. O oaie nu este o vacă. Deci simbolul pentru a număra o oaie nu este acelaşi cu cel pentru a număra o vacă. Şi fiecare obiect care putea fi numărat avea propriile sale simboluri ca şi cum ar fi avut propriile jetoane.

Dar toate acestea au luat sfârşit acum. Numerele au căpătat propriile simboluri. Mai clar, pentru a număra opt oi nu se mai utilizează opt simboluri care desemnează o oaie, ci se scrie direct cifra opt urmată de simbolul pentru oaie.

Iar pentru a număra opt vaci este suficient să se înlocuiască simbolul pentru oaie cu acela pentru vacă. în ceea ce priveşte numărul, el rămâne acelaşi.

Această etapă a istoriei gândirii este cu adevărat fundamentală. Dacă ar trebui să alegem o dată pentru actul de naştere a matematicii, atunci eu aş alege fără îndoială acest moment. Adică momentul în care numărul ajunge să existe prin şi pentru el însuşi, în care el se separă de realitate pentru a o observa de sus. Tot ceea ce a fost înainte nu a fost decât o perioadă de gestaţie. Pietrele cioplite, frizele, jetoanele nu sunt decât preludii pentru această naştere programată a numărului.

Numărul trece de acum încolo de partea abstractului, iar acest lucru constituie adevărata identitate a matematicii; ea devine ştiinţa abstractului prin excelenţă. Obiectele pe care le studiază nu au existenţă fizică. Acestea nu sunt materiale, nu sunt alcătuite din atomi. Sunt doar idei. Totuşi, aceste idei sunt de o eficienţă formidabilă în momentul în care dorim să pricepem lumea!

Fără îndoială că nu este o întâmplare că necesitatea de a scrie numerele a fost atât de importantă în apariţia scrierii. Căci, dacă alte idei puteau fi transmise oral fără probleme, ar fi fost dificil să se stabilească un sistem numeric fără a trece printr-o notaţie scrisă.

Chiar şi astăzi, ideea pe care ne-o facem despre numere este oare deosebită de modul în care le scriem? Dacă vă cer să vă gândiţi la o oaie, cum o vedeţi? Vă reprezentaţi, fără îndoială, un animal cu patru picioare, lânos, care behăie. Nu v-ar veni în minte să vizualizaţi cele patru litere ale cuvântului „oaie.” Totuşi, dacă vă vorbesc acum despre numărul o sută douăzeci şi opt, ce anume vedeţi? Percepeţi pe 1, pe 2 şi pe 8, care capătă formă în creier şi se înlănţuie ca şi cum ar fi scris cu cerneala impalpabilă a gândurilor dumneavoastră? Reprezentarea mentală pe care ne-o facem despre numerele mari pare a fi indispensabil legată de forma lor scrisă.

Exemplul este fără precedent. în timp ce pentru toate celelalte lucruri scrierea nu este decât un mijloc de a retranscrie ceea ce exista înainte în limbajul oral, iată că în cazul numerelor scrierea este cea care va dicta limbii. Gândiţi-vă că atunci când pronunţaţi „o sută douăzeci şi opt” nu faceţi altceva decât să citiţi 128, adică: 100 + 20 + 8. Dincolo de un anumit prag, este imposibil să vorbeşti despre numere fără a recurge la suportul scrierii. înainte de a fi scrise, numerele mari nu aveau cuvinte care să le denumească.

în epoca noastră, sunt încă populaţii care nu deţin decât un număr foarte limitat de cuvinte pentru a desemna numerele. Astfel, membrii tribului Pirahă, vânători şi culegători care trăiesc pe malurile râului Maici în Amazonia, numără

doar până la doi. Dincolo de această cifră folosesc un singur cuvânt care semnifică „mai mulţi” sau „mult”. Tot în Amazonia, cei din tribul Munduruku au cuvinte pentru a desemna cifrele până la cinci, adică degetele de la o mână.

în societăţile noastre moderne numerele au pus stăpânire pe viaţa de zi cu zi. Au devenit atât de omniprezente şi indispensabile, încât uităm adesea cât de genială este ideea care stă în spatele lor şi cât de multe secole le-au trebuit strămoşilor noştri pentru a le făuri.

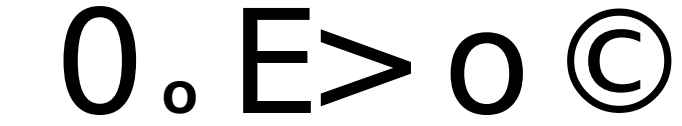
De-a lungul timpului au fost inventate numeroase procedee pentru a scrie numerele. Cel mai simplu dintre acestea constă în a trasa tot atâtea semne câte indică numărul dorit. De exemplu, când trasăm liniuţe unele lângă altele. Aceasta este metoda pe care încă o folosim frecvent, de pildă pentru a număra punctele din cadrul unui joc.

Probabil cel mai vechi semn cunoscut al utilizării acestui procedeu datează cu mult înaintea inventării scrierii de către sumerieni. Oasele Ishango au fost găsite în anii 1950 pe malul lacului Edouard din actuala Republică Democrată Congo şi au fost datate ca fiind de

acum douăzeci de mii de ani. Lungi de 10 şi 14 cm, acestea au particularitatea de a fi fost crestate cu o multitudine de semne mai mult sau mai puţin egal despărţite între ele. Care era rolul acestor crestături? Era vorba probabil despre un prim sistem de numărare. Unii văd în acele oase un calendar, în timp ce alţii extrapolează cunoştinţe aritmetice deja foarte avansate. Este greu să ştim cu exactitate dacă aşa stăteau lucrurile. Cele două oase sunt în prezent vizibile la Muzeul de Ştiinţe Naturale din Belgia, la Bruxelles.

Această metodă de numărare care utilizează un semn pentru fiecare unitate adăugată îşi atinge rapid limitele de îndată ce se impune să procesăm numere relativ mari. Pentru a avansa rapid, este mai indicat să se facă pachete.

Jetoanele mesopotamienilor puteau reprezenta mai multe unităţi. Exista, de exemplu, un jeton special pentru a reprezenta zece oi. în momentul trecerii la scriere, acest principiu s-a păstrat. Se găsesc astfel simboluri pentru a desemna pachete de 10, 60, 600, 3 600 şi 36 000.



1 10 60 600 3 600 36000

Observăm deja căutarea unei logici în construirea simbolurilor. Astfel, 60 sau 3 600 sunt multiplicate cu 10 atunci când le adăugăm un

cerc în interior. Odată cu apariţia scrierii cuneiforme, aceste prime simboluri se transformă puţin câte puţin.

1 10 60 600 3600 36000

Datorită vecinătăţii cu Mesopotamia, Egiptul nu întârzie să adopte scrierea şi dezvoltă, începând cu mileniul al III-lea, propriile simboluri pentru numerotare.

1 10 100 1000 10000 100 000 1000000

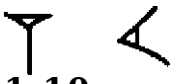
De acum încolo, sistemul a devenit pur zecimal: fiecare simbol are o valoare de zece ori mai mare decât precedentul.

Aceste sisteme prin adiţionare, în care este suficient să adaugi valorile simbolurilor scrise, vor cunoaşte un imens succes în lume si o multitudine de variante vor ve- dea lumina zilei de-a lungul întregii Antichităţi şi a unei bune părţi din Evul Mediu. Vor fi utilizate cu precădere de către greci şi romani care se vor concentra pe folosirea literelor din alfabetele lor ca simboluri numerice.

în faţa sistemelor prin adiţionare, un nou mod de scriere a numerelor va apărea încetul cu încetul: numărarea prin poziţionare. în aceste

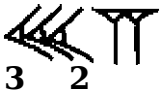
sisteme, valoarea unui simbol depinde de locul pe care îl ocupă în cadrul numărului. Şi, încă o dată, mesopotamienii sunt primii inventatori ai acestui sistem.

în al II-lea mileniu înaintea erei noastre vine rândul Babilonului să pună stăpânire pe Orientul Apropiat. Scrierea cuneiformă este încă la modă, dar nu se utilizează acum decât două simboluri: cuiul simplu, care valorează 1, şi unghiul, care valorează 10.



1 10

Aceste două semne permit să fie scrise prin adiţionare toate numerele până la 59. De pildă, numărul 32 se scrie cu 3 unghiuri, urmate de două cuie.



3 2

Apoi, de la 60 încolo începem să realizăm grupuri. Şi sunt aceleaşi simboluri care vor servi la scrierea grupurilor de 60. Astfel, precum în scrierea noastră actuală, cifrele citite de la dreapta la stânga desemnează unităţile, pe urmă zecile, apoi sutele. în această numerotare babiloniană citim mai întâi unităţile, apoi şaizecile, apoi trei mii şase sute (adică 60 x 60) şi aşa mai departe, fiecare poziţie valorând 60 înmulţit cu precedenta.

De exemplu, numărul 145 este compus din două şaizeci, care fac o sută douăzeci, la care trebuie adăugate douăzeci şi cinci de unităţi. Aşadar, babilonienii ar fi scris acest număr în felul următor:

7T

2 şaizeci 25 unitâţi

145

Datorită acestui sistem, savanţii babilonieni vor căpăta cunoştinţe ieşite din comun. Desigur că ştiu să pună în practică cele patru operaţii de bază: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea, dar totodată şi rădăcinile pătrate, ridicarea la putere sau inversările. Creează tabele aritmetice extrem de detaliate şi propun ecuaţii pentru care dezvoltă metode de rezolvare extrem de precise.

Totuşi toate aceste cunoştinţe vor fi în curând uitate. Civilizaţia babiloniană se află în declin şi o mare parte dintre descoperirile sale matematice vor trece în uitare. Gata cu numerotarea prin poziţionare! Gata cu ecuaţiile! Va trebui să aşteptăm secole întregi pentru ca aceste probleme să fie repuse pe tapet şi abia în secolul al XlX-lea se reuşeşte descifrarea tăblitelor cuneiforme, care ne vor aduce aminte că mesopotamienii au răspuns la ele înaintea tuturor.

După babilonieni, mayaşii sunt cei care vor imagina un sistem poziţional, dar folosind baza 20. Apoi vine rândul indienilor să inventeze un sistem în baza 10. Acest ultim sistem va fi reutilizat de savanţii arabi înainte de a ajunge în Europa la sfârşitul Evului Mediu. Aceste simboluri vor căpăta numele de cifre arabe şi vor cuceri curând întregul mapamond.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Odată cu apariţia numerelor, umanitatea înţelege treptat că tocmai a inventat un instrument care depăşeşte toate aşteptările pentru a descrie, a analiza şi a înţelege lumea care o înconjoară.

Suntem atât de încântaţi de acest lucru încât uneori exagerăm. Apariţia numerelor coincide cu apariţia diferitelor practici de numerologie. Numerelor li se atribuie proprietăţi magice, le interpretăm depăşind sensul pe care îl au, căutăm să citim în ele mesaje ale zeilor şi ale destinului lumii.

în secolul al Vl-lea înaintea erei noastre, Pitagora va face din număr conceptul fundamental al filosofiei sale. „Totul este număr”, spune gânditorul grec. După el, numerele sunt cele care produc figuri geometrice care la rândul lor generează cele patru elemente ale materiei: focul, apa, pământul şi aerul, ce intră în componenţa tuturor fiinţelor. Pitagora creează astfel un întreg sistem de gândire cu ajutorul numerelor. Imparul este asociat masculinului, în

timp ce parul este asociat femininului. Numărul 10 reprezentat sub forma unui triunghi este denumit *tetractis* şi devine simbolul armoniei şi perfecţiunii Cosmosului. Pitagoreicii se află la originea arit- manţiei, care pretinde că poate citi caracterele umane asociind valori numerice literelor care compun numele acestora.

în paralel cu toate acestea, discuţiile se poartă asupra a ceea ce este numărul. Unii autori susţin că unitatea nu este un număr, căci numărul desemnează multiplul, deci nu poate fi considerat astfel decât dincolo de doi. Se va merge până într-acolo încât să se spună că, pentru a putea genera toate celelalte numere, 1 trebuie să fie atât par, cât şi impar.

Mai târziu, ceea ce a animat discuţiile si mai mult a
[7] *t t*
fost subiectul lui zero, al numerelor negative sau al numerelor imaginare. De fiecare dată, apariţia acestor noi idei în cercul numerelor va genera dezbateri şi-i va obliga pe matematicieni să-şi lărgească orizonturile.

3

Pe scurt, numărul nu a încetat să fie o problemă şi le va fi necesar mult timp oamenilor să înveţe să stăpânească aceste creaturi stranii ieşite direct din creierele lor.Nimeni nu intră aici dacă nu este geometru

Odată numărul inventat, matematica nu va întârzia să se diversifice. Mai multe ramuri, precum aritmetica, logica sau algebra, vor germina puţin câte puţin în sânul său, dezvoltându-se până la a atinge maturitatea şi afir- mându-se ca discipline de sine stătătoare.

Una dintre acestea va extrage repede lozul câştigător şi-i va captiva pe cei mai mulţi savanţi ai Antichităţii; este vorba despre geometrie. Ea este cea care va asigura renu- mele primelor VIP-uri ale matematicii, precum Thales, Pitagora sau Arhimede, ale căror nume bântuie astăzi paginile manualelor şcolare.

Totuşi, înainte de a deveni domeniul marilor gânditori, geometria îşi va câştiga titlurile de glorie pe teren. Etimologia sa atestă acest lucru, căci ea este înainte de toate ştiinţa măsurării pământului, iar primii care îl vor măsura vor fi matematicienii de proximitate. Problemele împărţirii teritoriului fac parte dintre clasicele genului. Cum să divizăm un câmp în părţi egale? Cum să evaluăm preţul unui teren în funcţie de suprafaţa sa? Care dintre aceste două parcele este mai apropiată de râu? Ce traiectorie trebuie să urmeze viitorul canal pentru a fi cel mai scurt pentru construire?

Toate aceste întrebări sunt de o importanţă majoră în societăţile antice în care întreaga economie se articulează încă în mod fundamental în jurul agriculturii şi deci al repartizării terenurilor. Pentru a răspunde la aceste întrebări e nevoie de constituirea unei cunoaşteri de tip geometric care se îmbogăţeşte şi se transmite din generaţie în generaţie. A dispune de această cunoaştere înseamnă în mod indiscutabil a-i asigura un loc central şi de neînlocuit în cadrul societăţii.

Pentru aceşti profesionişti ai măsurătorii, sfoara este adesea primul instrument al geometriei. în Egipt, întinzător de sfoară este o meserie în sine. Ori de câte ori creşterea apelor Nilului provoacă inundaţii, se face apel la aceştia pentru a retrasa limitele parcelelor din vecinătatea fluviului. Datorită informaţiilor

cunoscute pe teren, iată-i fixându-şi parii, desfăşurându-şi sforile lungi de-a lungul câmpurilor şi efectuând apoi calcule care permit regăsirea graniţelor şterse de ape.

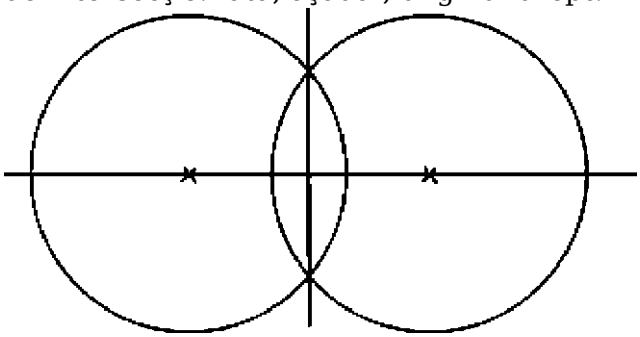
Atunci când se ridică o clădire, tot ei sunt cei care intervin primii ca să facă măsurătorile la sol şi să marcheze cu precizie amplasarea construcţiei plecând de la planurile arhitectului. Iar când este vorba de construirea unui templu sau a unui monument foarte important, adesea faraonul însuşi este cel care vine să întindă prima coardă în mod simbolic.

Trebuie să spunem că sfoara este instrumentul geometric „toate-ntr-unul”. Cei care măsoară se servesc de ea ca de riglă, compas sau echer.

în ceea ce priveşte rigla, lucrurile sunt simple: întin- deţi sfoara între două puncte fixe şi veţi obţine o linie dreaptă. Iar dacă doriţi să aveţi o riglă gradată, puteţi să faceţi noduri pe sfoară la intervale regulate. Nici în privinţa compasului nu e vorba de vreo vrăjitorie. Fixaţi una dintre cele două extremităţi în jurul unui par şi învârtiţi celălalt capăt. Iată cercul! Iar dacă sfoara este gradată, veţi şti cu precizie şi lungimea razei.

Dar în ceea ce priveşte echerul, lucrurile se complică puţin. Să ne oprim câteva momente asupra acestei probleme particulare. Cum veţi proceda pentru trasarea unui unghi drept? Dacă ne gândim puţin, pot fi imaginate mai multe metode diferite. Dacă, de exemplu, trasaţi două

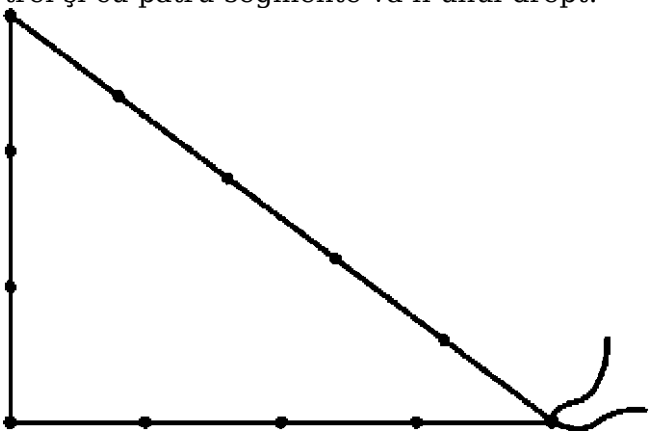
cercuri care se intersectează, atunci linia dreaptă care leagă cele două centre va fi perpendiculară pe linia dreaptă care trece prin cele două puncte de intersecţie. Iată, aşadar, unghiul drept.



Această construcţie este valabilă doar dacă o privim din punct de vedere teoretic, căci în practică lucrurile sunt mai complicate. Imaginaţi-vă cum cei care măsoară câmpul ar trebui ca ori de câte ori au nevoie de un unghi drept să traseze două cercuri mari sau să controleze dacă un unghi deja construit este drept sau nu. Nu este nici rapid şi nici eficient.

Măsurătorii au adoptat o altă metodă, mai subtilă şi mai practică; ei realizează direct cu sfoara un triunghi care are un unghi drept. Un astfel de triunghi se numeşte triunghi dreptunghic. Celebru este cel care are dimensiunile 3-4-5. Dacă luaţi o sfoară împărţită în douăsprezece segmente prin treisprezece noduri, veţi putea să creaţi un triunghi ale cărui laturi vor măsura trei, patru, respectiv cinci segmente.

Şi, ca prin minune, unghiul format de laturile cu trei şi cu patru segmente va fi unul drept.



Acum patru mii de ani, babilonienii aveau tabele cu numere care permiteau construirea triunghiurilor dreptunghice. Tăbliţa Plimpton 322, care se găseşte acum
în colecţiile Universităţii Columbia din New York si este
> t >
datată cu 1 800 de ani înaintea erei noastre, prezintă un tabel de cincisprezece triplete de astfel de numere. în afară de 3-4-5 regăsim alte paisprezece triunghiuri, printre care unele net mai complexe, precum 65-72-97 sau 1679-2400-2929. Având marje de eroare foarte mici (de dimensiunile unei cochilii) — care exprimă eroarea de calcul sau de recopiere —, triunghiurile tăbliţei Plimpton sunt desăvârşite. Toate au un unghi drept.

Este greu să ştim cu precizie începând cu ce epocă măsurătorii babilonieni au folosit cunoaşterea triunghiu- rilor dreptunghice pe teren, deoarece utilizarea acestora a persistat mult timp după dispariţia civilizaţiei lor. în Evul Mediu, sfoara cu treisprezece noduri, numită şi coarda druizilor, era unul dintre instrumentele esenţiale ale constructorilor de catedrale.

De-a lungul istoriei matematicii, nu rareori constatăm că anumite noţiuni asemănătoare apar în mod independent chiar şi la mii de kilometri unele de altele şi în contexte culturale complet diferite. Una dintre cele mai renumite coincidenţe la care asistăm cu uimire este cea în care aflăm că civilizaţia chineză a dezvoltat în cursul primului mileniu dinaintea erei noastre o întreagă cunoaştere practică de tip matematic care seamănă într-un mod straniu cu descoperirile civilizaţiilor babiloniene, egiptene sau greceşti din aceeaşi epocă.

Aceste cunoştinţe au fost acumulate de-a lungul secolelor înainte de a fi compilate sub dinastia Han, în urmă cu aproape două mii de ani, într-una dintre cele mai mari opere matematice ale lumii: *Nouă capitole asupra artei matematice.*

Primul dintre aceste *Nouă capitole* este dedicat în întregime studiului măsurătorii câmpurilor de diferite forme. Triunghiuri dreptunghice, triunghiuri oarecare, trapeze, discuri, secţiuni de discuri sau inele sunt astfel

de figuri geometrice pentru care sunt expuse minuţios procedee de calcul ale suprafeţelor. Mai departe în cadrul operei descoperim că al nouălea şi ultimul capitol se apleacă asupra studiului triunghiurilor dreptunghice. Ia ghiciţi despre care figură este vorba încă de la prima frază a acestui capitol... 3-4-5!

Aşa apar marile idei. Ele depăşesc diferenţele culturale şi pot să înflorească spontan acolo unde spiritul uman este gata să le culeagă.

Câteva probleme din epocă

Dilemele care apar în măsurarea câmpului, în arhitectură şi în amenajarea teritoriului i-au determinat pe savanţii Antichităţii să-şi pună probleme de natură geometrică de o mare diversitate. Iată câteva exemple în acest sens: Enunţul următor, care apare pe tăbliţa babiloniană BM 85200, arată că babilonienii nu se mulţumeau doar cu geometria plană, ci se ocupau şi de geometria în spaţiu.

Fie o pivniţă. Pe cât de lungă, pe atât de adâncă. 1, pământul, am săpat Pământul scos l-am îngrămădit,
Î'IO. Lungime şi frunte, '50. Lungime, frunte, ce anume?[1]

Aţi înţeles ceva? Stilul matematicienilor din Babilon era telegrafic. Detaliind puţin, acest enunţ ar putea să sune astfel:

Adâncimea unei pivniţe este de douăsprezece ori mai

mare[2] decât lungimea sa. Dacă sap pivniţa pentru ca
aceasta să aibă o unitate în plus în adâncime, atunci
volumul său va fi egal cu 7/6. Dacă adaug lungimea
si lăţimea, voi obţine 5/6[3]. Care sunt dimensiunile
*/ / * / '*
pivniţei?

Această problemă este însoţită de metoda detaliată a rezolvării, care ne conduce la soluţie; lungimea măsoară 1/2, lăţimea 1/3 şi adâncimea 6. Să facem acum un mic ocol pe Nil. Este de la sine înţeles că la egipteni găsim probleme cu piramide. Următoarea problemă a fost extrasă dintr-un celebru papirus aparţinând scribului Ahmes şi datat din prima jumătate a secolului al XVI-lea înaintea erei noastre.

Traducere jens Hoyrup, *L'algèbre au temps de Babylone,* Éditions Vuibert / Adapt-SNES, 2010. *(N.a.)*

Enunţul tăbliţei pare să spună că lungimea şi adâncimea sunt egale, dar în sistemul babilonian adâncimile sunt măsurate printr-o unitate de douăsprezece ori mai mare decât lungimile. *(N.a.)* Trebuie să reţinem totodată că în sistemul în baza 60, notaţia 1'10 desemnează numărul egal cu „în plus zece şaizecimi”, pe care noi îl notăm în sistemul actual prin fracţia 7/6. în ceea ce priveşte notaţia '50 ea semnifică fracţia 5/6 (sau cincizeci de şaizecimi). *(N.a.)*

Care este înălţimea unei piramide a cărei latură de la bază este de 140 de coţi si a cărei pantă[1] este de 5 palme şi 1 deget?

Cotul, palma şi degetul erau unităţile de măsură care aveau valoarea de 52,5 cm, 7,5 cm şi 1,88

cm. Ahmes oferă şi soluţia: 93 de coţi şi 1/3. în acelaşi papirus, scribul se apleacă şi asupra geometriei cercului:
Exemplu de calcul al unui câmp rotund având diametrul de 9 khet. Care este aria acestuia?
Khet-ul este tot o unitate de măsură, care are valoarea de 52,5 metri. Pentru a rezolva această problemă, Ahmes spune că aria acestui câmp circular este egală cu cea a unui câmp pătrat care are latura de 8 *khet* Comparaţia este foarte utilă, căci este cu mult mai simplu să calculezi aria unui pătrat decât pe aceea a unui disc. El găseşte 8 x 8 = 64. Totuşi matematicienii care vin după Ahmes vor descoperi că rezultatul nu este exact. Aria unui disc şi a unui pătrat nu coincid cu exactitate. în continuare, mulţi vor încerca să răspundă la această întrebare: cum construim un pătrat a cărui arie este egală cu cea a unui cerc? Mulţi se vor strădui în zadar să răspundă la această întrebare şi pe bună dreptate. Ahmes, fără să ştie, a fost unul dintre primii care s-a aplecat asupra unei probleme care va deveni mai târziu una dintre cele

Panta unei feţe a piramidei, numită *seked*\|*n* egipteană, corespunde unei distanţe orizontale între două puncte a căror înălţime diferă cu un cot. *(N.a.)*

mai mari provocări matematice ale tuturor timpurilor: cvadratura cercului.
Şi în China se caută să se calculeze suprafaţa câmpurilor circulare. Următoarea problemă este extrasă din primul dintre cele *Nouă capitole.*

Să presupunem că am avea un câmp circular de 30 bu circumferinţă şi 10 bu diametru. Ce suprafaţă are câmpul?[1]

Aici, un *bu* este echivalentul a aproximativ 1,4 metri. Ca şi în Egipt, matematicienii chinezi îşi prind urechile cu această figură geometrică. Ştim astăzi că acest enunţ este fals, deoarece un disc având diametrul 10 are o circumferinţă uşor superioară lui 30. Acest lucru nu îi împiedică pe savanţii chinezi să dea o valoare aproximativă ariei (75 bu) şi nici să complice mai mult lucrurile intrând în probleme care privesc inelele circulare:

Să presupunem că avem un câmp în formă de inel a cărui circumferinţă interioară este de 92 bu, circumferinţa exterioară 122 bu si diametrul transversal 5 bu. Se cere t să se afle aria câmpului.

Ne îndoim că ar fi existat vreodată în China antică un câmp în formă de inel şi bănuim că aceste ultime probleme cu care s-au ocupat savanţii Imperiului de Mijloc, prinşi în jocul geometriei, şi le-au pus din pură curiozitate de natură teoretică. Şi în zilele noastre, una dintre modalităţile preferate de matematicieni pentru petrecerea timpului liber este aceea de a găsi figuri geometrice din ce în ce mai improbabile şi cu forme cât mai neregulate, pentru a le studia şi a le înţelege.

[1] Traducere de Karine Chemla şi Shuchun Guo, *Les neuf chapitres,* Éditions Dunod, 2005. *(N.a.)*

Trebuie să-i includem printre meseriaşii care ţin de geometrie şi pe bematişti[I]. Dacă măsurătorii sau alţi în- tinzători de sfoară au ca obiectiv să măsoare câmpurile şi clădirile, bematistii văd lucrurile la o scară mai mare. în
[1] *t*
Grecia, aceşti oameni au ca sarcină să măsoare distanţele mari numărând paşii.

Uneori, sarcina aceasta îi conduce departe, foarte departe de casă. Astfel, în secolul al IV-lea înaintea erei noastre, Alexandru cel Mare a luat cu el câţiva bematişti
[1] *t t*
în campania de cucerire a Asiei, care l-a dus până la frontiera cu India actuală. în acest caz era vorba de trasee de mai multe mii de kilometri pe care geometrii pedeştri le aveau de măsurat.

Luaţi puţină distanţă şi imaginaţi-vă pentru un moment spectacolul straniu pe care îl dădeau aceşti oameni cu pas cadenţat traversând întinderile imense ale Orientului Mijlociu. Priviţi-i cum străbat platourile Mesopotamiei de Sus, mergând de-a lungul peisajelor aride şi galbene ale Peninsulei Sinai pentru a ajunge pe malurile fertile ale Văii Nilului, apoi făcând cale întoarsă, croindu-şi cu îndrăzneală drum prin regiunile muntoase ale Imperiului Persan şi prin

I Bematistii erau un fel de topografi ai Antichităţii. Termenul provine din greacă: Br^ana-nic;. Paşii se numeau *bemi. (N.t.)*

deserturile din Afganistanul de astăzi. îi vedeţi mergând necontenit într-un ritm sacadat şi monoton, trecând cu piciorul munţii imenşi ai lui Hindu Kush pentru a reveni pe malurile Oceanului Indian? Fără încetare îşi numără continuu paşii...

Imaginea este izbitoare, iar sarcina lor epuizantă pare a fi o nebunie. Cu toate acestea, rezultatele lor sunt de o precizie remarcabilă: în medie, există o diferenţă mai mică de 5% între măsurătorile lor şi distanţele reale pe care le cunoaştem astăzi. Bematistii lui Alexandru au
; t
permis astfel ca geografia regatului său să fie descrisă aşa cum niciodată în istorie nu s-a mai întâmplat pentru o întindere atât de vastă.

Două sute de ani mai târziu, în Egipt, un savant de origine greacă, pe numele său Eratostene, imaginează un proiect încă şi mai îndrăzneţ: acela de a măsura circumferinţa... Pământului. Nici mai mult, nici mai puţin! Bineînţeles că nu se pune problema de a-i trimite pe sărmanii bematişti să facă înconjurul Pământului. Cu toate acestea, datorită unor observaţii minuţioase asupra diferenţei de înclinare a razelor soarelui între oraşele Syene, actualul Assouan, şi Alexandria, Eratostene a calculat că distanţa între cele două oraşe trebuia să reprezinte a cincizecea parte din circumferinţa totală a Pământului.

Fireşte că şi el a făcut apel la bematişti pentru a confirma măsurătoarea. Contrar bematiştilor greci, cei egipteni nu-şi numără direct paşii, ci numără paşii cămilelor care îi însoţesc. Animalul acesta este renumit pentru regularitatea cu care păşeşte. După lungi zile de călătorie de-a lungul Nilului, rezultatul a sosit: cele două oraşe sunt separate de 5 000 de stadii, iar circumferinţa planetei noastre este deci de 250 000, adică 39 375 kilometri. încă o dată, rezultatul este de o precizie nemaipomenită când ştim că astăzi mărimea exactă a acestei circumferinţe este de 40 008 km. Asta înseamnă că marja de eroare este sub 2%.

Mai mult decât oricare alt popor al Antichităţii, grecii vor acorda geometriei un loc aparte în sânul culturii lor. Ea este recunoscută pentru rigoarea şi capacitatea de a forma spiritele. Pentru Platon, geometria constituie un prag obligatoriu de trecut pentru cel care doreşte să devină filosof, iar legenda spune că pe frontispiciul Academiei sale era scrisă următoarea deviză: „Nimeni nu va intra aici dacă nu este geometru”.

Geometria este atât de în vogă, încât va ajunge să cucerească şi alte discipline. Proprietăţile aritmetice ale numerelor vor fi astfel interpretate într-un limbaj geometric. Iată, de exemplu, definiţia pe care Euclid o dă în cea de-a şaptea carte a *Elementelor de matematică,* datată

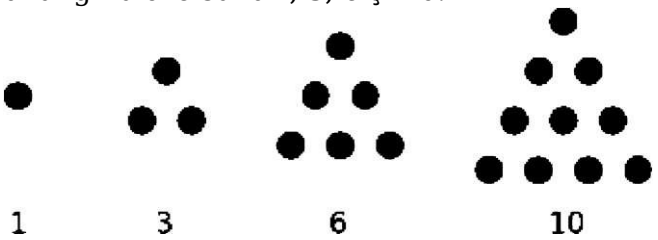
ca aparţinând secolului al III-lea înaintea erei noastre:
Când două numere se înmulţesc; rezultă un alt număr,
cel care e produs se numeşte plan, iar laturile sale sunt
numerele care s-au înmultit.
t

Dacă înmulţesc 5 x 3 , numerele 5 şi 3 se numesc, aşadar, după Euclid, „laturile” înmulţirii. De ce aşa? Pur şi simplu, deoarece o înmulţire se poate reprezenta ca suprafaţa unui dreptunghi. Dacă acesta are o lăţime egală cu 3 şi o lungime de 5, aria sa are valoarea de 5 x 3 . Numerele 3 şi 5 constituie laturile dreptunghiului.
Rezultatul înmulţirii, adică 15, este denumit „plan”, deoarece acesta corespunde din punct de vedere geometric unei suprafeţe.

S

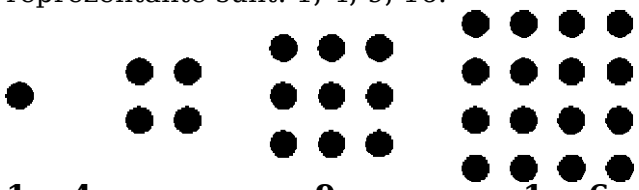
5

Construcţii similare sunt valabile şi pentru alte figuri geometrice. Astfel, un număr este numit triunghiular dacă poate fi reprezentat în formă de... triunghi. Primele trei numere triunghiulare sunt 1, 3, 6 şi 10.



Acest din urmă triunghi, de 10 puncte, nu este altul decât faimosul tetractis al lui Pitagora, iar discipolii lui au făcut din el simbolul armoniei Cosmosului. Mergând pe acelaşi principiu,

regăsim numerele pătrate, ale căror prime reprezentante sunt: 1, 4, 9, 16.



1 4 9 1 6

Şi am putea să continuăm în felul acesta mult timp, cu diverse figuri. Reprezentarea geometrică a numerelor ne permite să facem vizibile şi evidente proprietăţi care altfel ar rămâne incomprehensibile.

Să luăm un exemplu: aţi încercat vreodată să adunaţi numerele impare consecutive? 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ...? Nu? Dacă faceţi acest lucru, veţi descoperi un lucru uimitor. Iată-1!

1

1 + 3 = 4 1 + 3 + 5 = 9 1 + 3 + 5 + 7 = 1 6

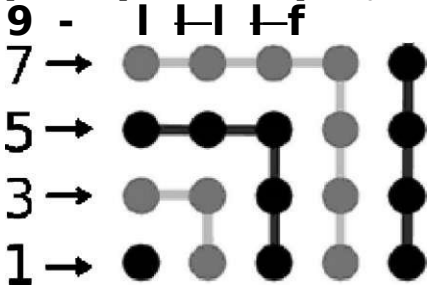
Observaţi particularitatea numerelor care apar? în ordine: 1, 4, 9, 16 ... sunt numerele pătrate.

Puteţi continua astfel cât timp doriţi, regula nu va fi niciodată încălcată. Adunaţi, dacă aveţi curajul, primele zece numere impare de la 1 la 19 şi îi veţi găsi pe 100 care este al zecelea număr pătrat:

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 1 1 + 1 3 + 1 5 + 1 7 + 1 9 =

1 0 x 1 0 = 1 0 0

Uimitor, nu-i aşa? Dar de ce? Prin ce miracol regăsim această proprietate care este mereu adevărată? Am putea, desigur, să oferim o demonstraţie numerică, dar lucrurile sunt cu mult mai simple. Datorită reprezentării geometrice, este suficient să decupăm în felii numerele pătrate pentru ca explicaţia să ne sară în ochi.



Fiecare felie adaugă un număr impar de bile, care creşte, în acelaşi timp, cu o unitate latura pătratului. E dovedit simplu şi limpede.

Pe scurt, în regatul matematicii, geometria este regină şi fiecare afirmaţie din cadrul ei nu va putea fi validată fără să fie trecută prin filtrul său. Hegemonia sa va dura cu mult dincolo de Antichitate şi de civilizaţia greacă. Va trebui să aşteptăm mai mult de două mii de ani până când savanţii Renaşterii vor declanşa o imensă mişcare de modernizare a matematicii, care va detrona geometria în favoarea unui limbaj cu totul nou: acela al algebrei.Epoca teoremelor

Iată-ne la începutul lunii mai. Este amiază şi soarele străluceşte deasupra parcului Villette din nordul Parisului.

în fata mea se află Oraşul Stiintelor si Industriei, având

t > > > > r

în prim-plan Geoda. Această stranie sală de cinema, construită la mijlocul anilor '80, seamănă cu o bilă imensă

din fatete, care are treizeci si sase de metri în diametru.

t ' t >

Locul este foarte aglomerat. Aici se găsesc turişti cu aparate de fotografiat, veniţi să vadă curioasa cupolă pariziană. Sunt familii care îşi fac plimbarea de miercuri. Ici, colo vezi câţiva îndrăgostiţi aşezaţi pe iarbă sau mergând ţinându-se de mână. Alergători răzleţi fac zigzaguri prin mulţimea din cartier, care trece indiferentă şi care abia dacă aruncă o privire spre strania apariţie a acestei sfere reflectorizante din mijlocul vieţii lor cotidiene. în jurul bilei, copiii se amuză observând imaginile deformate ale lumii care îi înconjoară.

în ceea ce mă priveşte, mă aflu astăzi aici deoarece geometria mă interesează în mod special. Mă apropii de Geodă, examinând-o cu atenţie. Suprafaţa sa este alcătuită din mii de oglinzi triunghiulare, asamblate unele lângă altele. La prima vedere, întregul ansamblu pare perfect regulat, dar după câteva minute de observare a cupolei, încep să văd mai multe neregularităţi. în jurul anumitor puncte foarte precise, triunghiurile se deformează şi se lărgesc ca şi cum o malformaţie a structurii ar trage de ele. Cu toate că aproape pe toată suprafaţa sferei oglinzile triunghiulare formează o înlănţuire perfect regulată alcătuind grupuri hexagonale de câte şase, există o duzină de puncte particulare în jurul cărora triunghiurile nu formează decât grupuri de câte cinci.

Reprezentarea Geodei cu ale sale mii de triunghiuri. Punctele în care triunghiurile formează grupuri de câte cinci sunt semnalate prin gri-închis.

La o primă privire, neregularităţile sunt aproape invizibile. Cei mai mulţi trecători nici măcar nu dau atenţie acestui lucru. Totuşi, în ochii mei de matematician ele nu sunt deloc uimitoare. Aş putea să spun chiar că mă aşteptam să le găsesc. Arhitectul nu a făcut nicio greşeală, în lume există, de altfel, numeroase alte construcţii cu o geometrie asemănătoare şi toate au această duzină de puncte în care piesele de bază formează grupuri de câte cinci, în loc de câte şase. Aceste puncte sunt rezultatul unor constrângeri geometrice de neocolit, descoperite acum mai mult de două mii de ani de către matematicienii greci.

Theaitetos din Atena este un matematician din secolul al IV-lea înaintea erei noastre şi lui i se atribuie, în general, descrierea completă a

poliedrelor regulate. în geometrie, un poliedru este pur şi simplu o figură cu un volum, delimitată de mai multe feţe plane. Astfel, cubu- rile şi piramidele fac parte din familia poliedrelor, contrar sferelor şi cilindrelor, ale căror feţe sunt rotunjite. Geoda, cu feţele sale triunghiulare, poate fi considerată drept un poliedru gigantic, chiar dacă numărul mare de feţe face ca, văzută de departe, să semene cu o sferă.

De la stânga la dreapta: tetraedru, hexaedru, octaedru, dodecaedru şi icosaedru.

Theaitetos se va interesa în mod special de poliedrele care au o simetrie perfectă. Adică de acelea care au toate feţele şi toate unghiurile egale. Iar descoperirea sa este cel puţin surprinzătoare: el nu a găsit decât cinci poliedre şi a demonstrat că nu există altele în afară de acestea. Cinci solide şi asta-i tot. Nici măcar unul în plus.

Şi astăzi folosim denumirile poliedrelor după numărul feţelor scris în greaca veche, urmat de sufixul *-edru.* Astfel, cubul cu cele şase feţe pătrate poartă denumirea în geometrie de hexaedru. Tetraedrul, octaedrul, dodecae- drul şi icosaedrul au patru, opt, douăsprezece şi douăzeci de feţe. Mai târziu, li se va da acestor cinci poliedre numele de „solide ale lui Platon”.

Ale lui Platon? De ce nu ale lui Theaitetos? Uneori, istoria este nedreaptă, iar descoperitorii nu sunt întotdeauna cei care primesc laudele din partea posterităţii. Filosoful atenian nu a contribuit cu nimic la descoperirea celor cinci solide, dar el le-a făcut celebre printr-o teorie care le asociază cu elementele din Cosmos. Focul este asociat tetraedrului, pământul hexaedrului, aerul octaedrului şi apa icosaedrului. în ceea ce priveşte do- decaedrul, cu feţele sale pentagonale, Platon consideră că Universul are forma acestuia. Această teorie a fost de mult timp abandonată de ştiinţă, dar cu toate acestea lui Platon i se atribuie cele cinci poliedre regulate.

Pentru a fi corecţi, trebuie să spunem că Theaitetos nu a fost nici el primul care a descoperit aceste cinci solide. Se găsesc modele sculptate sau descrieri scrise ale acestora cu mult mai vechi. O colecţie de biluţe din piatră sculptată care reproduc formele solidelor lui Platon a fost descoperită în Scoţia şi ar data cu o mie de ani înaintea matematicianului grec. Aceste piese sunt astăzi păstrate la Ashmolean Museum de la Oxford.

Aşadar, nici Theaitetos nu este mai breaz decât Platon? E cumva un impostor? Ba deloc, căci chiar dacă cele cinci figuri au fost cunoscute înaintea lui, el a fost primul care a demonstrat în mod clar că lista este completă. Inutil să căutăm mai multe, ne spune Theaitetos, nimeni nu va găsi niciodată altele în plus. Afirmaţia lui are

ceva convingător în ea. Ne scoate dintr-o îndoială înfiorătoare. Uff! Le avem pe toate aici.

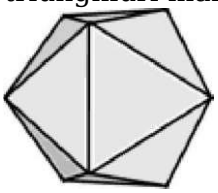
Această etapă este semnificativă pentru modul în care matematicienii greci vor aborda matematica. Pentru ei nu este vorba doar să fie găsite soluţii care funcţionează. Ei doresc să epuizeze problema. Doresc să fie siguri că nimic nu le scapă. Iar pentru acest lucru vor perfecţiona la modul absolut arta explorării matematicii.

Să revenim acum la Geoda noastră. Demonstraţia lui Theaitetos ne lasă fără drept de replică; este imposibil pentru un poliedru, având mai multe sute de feţe, să fie perfect regulat. în cazul acesta, cum procedăm atunci când suntem arhitecţi şi dorim să creăm o clădire care seamănă, pe cât posibil, cu o sferă perfectă? Este greu din punct de vedere tehnic să concepem edificiul dintr-o singură bucată. Nu este nimic de făcut, asta e clar! Trebuie să asamblăm o multitudine de mici feţe. Dar cum se creează o astfel de structură?

Se pot imagina diferite soluţii. Una dintre ele constă în a lua unul dintre solidele lui Platon, pe care îl modificăm. De exemplu, să privim icosaedrul. Cu cele douăzeci de feţe triunghiulare, acesta este cel care pare cel mai rotund dintre cele cinci. Pentru a-l face mai rotunjit este posibil să decupăm fiecare din feţele sale în mai multe feţe mai mici. Poliedrul obţinut poate fi atunci deformat ca şi cum l-am umfla

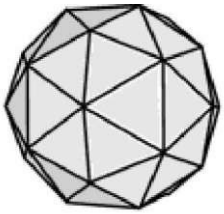
suflând în el pentru a-l aduce cât mai aproape de forma unei sfere.

Iată, de exemplu, ce se întâmplă dacă subdivizăm fiecare faţă a icosaedrului în patru triunghiuri mai mici.



Icosaedru

Icosaedru cu feţele decupate în patru



Icosaedru cu feţele decupate şi umflat

Un astfel de poliedru se numeşte în geometrie... o geodă, adică din punct de vedere etimologic este vorba despre o figură care are forma Pământului, deci care seamănă cu o sferă. în principiu, nu e nimic complicat aici. Exact acest tip de construcţie este utilizat pentru Geoda din piaţa Villette, doar că subdiviziunea feţelor este mult mai rafinată. Triunghiurile de la baza icosaedrului sunt, de această dată, decupate în 400 de triunghiuri mai mici, ceea ce ne conduce la un total de 8 000 de faţete triunghiulare.

în realitate, Geoda numără mai puţin de 8 000 de faţete, adică 6 433, pentru că ea nu este completă. Baza acesteia, cea care stă pe sol, este trunchiată şi anumite triunghiuri lipsesc. Totuşi, această structură explică prezenţa celor douăsprezece neregularităţi. Ele corespund celor douăsprezece vârfuri ale icosaedrului de bază. Altfel spus, sunt punctele în care marile triunghiuri de plecare se intersectau câte cinci pentru a forma vârfurile icosaedrului. Aceste vârfuri, ascuţite la început, au fost aplatizate în timpul multiplicării feţelor până într-atât încât au

devenit aproape invizibile. Totuşi prezenţa lor rămâne vizibilă în angrenajul triunghiurilor, iar cele douăsprezece neregularităţi sunt acolo pentru a aduce aminte de
existenta lor trecătorilor atenti.
t ;

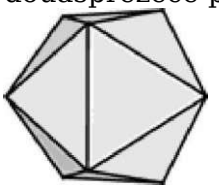
Fără îndoială că Theaitetos nu şi-ar fi imaginat vreodată că descoperirile sale vor conduce într-o bună zi la construcţia unor edificii precum Geoda. în aceasta constă marea capacitate a matematicii pe care savanţii Greciei Antice o vor dezvolta: matematica are o extraordinară capacitate de a crea idei noi. Grecii vor începe puţin câte puţin să-şi separe întrebările de problemele concrete şi să genereze astfel, din simplă curiozitate intelectuală, modele originale şi inspiraţională. Cu toate că pare adesea că nu au niciun fel de utilizare concretă în momentul în care sunt imaginate, aceste modele ajung câteodată să se dovedească de o utilitate uimitoare la multă vreme după dispariţia creatorilor acestora.

în zilele noastre regăsim cele cinci solide ale lui Platon în diferite contexte. De exemplu, acestea sunt folosite ca zaruri în jocurile de societate. Regularitatea lor îi conferă zarului echilibrul, adică toate feţele au aceleaşi
sanse de a iesi. Toată lumea cunoaşte zarul cubic cu sase
t > > t
feţe, dar jucătorii cei mai împătimiţi ştiu că multe jocuri folosesc şi celelalte patru forme pentru a multiplica atât sarisfacţia, cât şi probabilităţile.

în timp ce mă depărtez de Geodă, mă intersectez puţin mai încolo cu nişte copii care au început un meci de fotbal pe peluza din piaţa Villette folosindu-se de o minge improvizată. Nu-şi pun problema, dar în clipa asta şi ei îi datorează recunoştinţă lui Theaitetos. Au văzut, oare, că mingea are motive geometrice? Cele mai multe mingi de fotbal sunt create după acelaşi model: douăzeci de piese hexagonale (cu şase laturi) şi douăsprezece piese pentagonale (cu cinci laturi). Pe mingile obişnuite hexa- goanele sunt albe, în timp ce pentagoanele sunt negre. Şi chiar atunci când suprafaţa mingii este imprimată cu imagini diferite şi variate, este suficient să privim cu atenţie contururile care delimitează diferitele bucăţi pentru a putea să regăsim inevitabil cele douăzeci de hexagoane şi douăsprezece pentagoane.

Un icosaedru trunchiat! Iată numele pe care îl dau geometrii mingii de fotbal. Structura acesteia este motivată de aceleaşi raţiuni precum Geoda: ea trebuie să aibă cea mai regulată şi rotundă formă posibilă. Numai că, pentru a ajunge la acest rezultat, creatorii acestui model au utilizat o metodă diferită. în loc să subdivizeze fetele pentru a putea să rotunjească unghiurile, ei au ales să taie unghiurile. Imaginaţi-vă un icosaedru din plastilină şi luaţi un cuţit pentru a-i tăia vârfurile. Cele douăzeci de triunghiuri care au vârfurile tăiate devin hexagoane, iar cele

douăsprezece vârfuri retrase fac să apară cele douăsprezece pentagoane.



Cele douăsprezece pentagoane de pe mingea de fotbal au aşadar aceeaşi origine cu a celor douăsprezece neregularităţi de pe suprafaţa Geodei; adică acestea reprezintă locurile originare ale celor douăsprezece vârfuri ale icosaedrului.

Ce este cu fata aceasta cu o batistă în mână, pe care o întâlnesc în momentul în care părăsesc parcul Villette? Pare că are ceva. Să fie, oare, victima unei proliferări urâte a microicosaedrelor? Anumite organisme microscopice, precum virusurile, au în mod natural forma icosaedrelor sau a dodecaedrelor. Aşa este, de exemplu, cazul rhino- virusurilor care sunt responsabile de cea mai mare parte a răcelilor.

Dacă aceste creaturi minuscule adoptă asemenea forme se întâmplă din aceleaşi raţiuni pentru care noi le folosim în arhitectură sau pentru a face mingi. Adică există o grijă pentru simetrie şi economie. Datorită icosaedrelor, mingile nu sunt compuse decât din două tipuri de petice diferite. în acelaşi fel, membrana virusurilor nu este compusă decât din câteva tipuri de molecule diferite (patru în cazul

rhinovirusului), care se întrepătrund unele cu altele, repetând mereu acelaşi motiv. Codul genetic necesar creării unui asemenea înveliş este aşadar mult mai concis si economic decât dacă > t t
ar fi trebuit să creeze o structură fără nicio simetrie.

Iată încă o dată cum Theaitetos ar fi fost foarte uimit să vadă până unde merg poliedrele sale.

Să părăsim definitiv parcul Villette şi să reluăm cursul cronologic al poveştii noastre. Cum au ajuns matematicienii antici, precum Theaitetos, să-şi pună
întrebări din ce în ce mai generale şi teoretice? Pentru a înţelege acest lucru trebuie să ne întoarcem cu câteva mii de ani în urmă, pe marginea estică a Mediteranei. în timp ce culturile babiloniene şi egiptene se sting încetul cu încetul, Grecia Antică va cunoaşte momen-
[1] t
tele sale de glorie. începând cu secolul al Vl-lea înaintea erei noastre, lumea greacă intră într-o perioadă de fierbere culturală şi ştiinţifică fără precedent. Filosofia, poezia, sculptura, arhitectura, teatrul, medicina şi chiar istoria sunt tot atâtea discipline care vor cunoaşte o adevărată revoluţie. Chiar si astăzi, vitalitatea extraordinară ; t '
a acestei perioade are partea sa de fascinaţie şi mister. în această vastă mişcare intelectuală, matematicienii vor ocupa un loc de frunte.

Când ne gândim la Grecia Antică, prima imagine care ne vine în minte este cea a oraşului Atena, dominată de Acropole. Să ne imaginăm, rătăcind printre templele din marmură ale muntelui Pentelicon şi printre câţiva măslini, câţiva cetăţeni în togă albă care tocmai inventaseră prima democraţie din istorie. Această imagine este totuşi departe de reprezentarea întregii lumi greceşti cu toată diversitatea sa.

în secolele al VUI-lea şi al Vll-lea înaintea erei noastre, o mulţime de colonii greceşti şi-au croit drum spre ţărmurile mediteraneene. Aceste colonii s-au amestecat adesea cu popoarele locale, adoptând, în parte, obiceiurile şi modul lor de viaţă. Nu toţi grecii au acelaşi mod de viaţă. Alimentaţia lor, opţiunile de a petrece timpul liber, credinţele, sistemele politice variază foarte mult de la o regiune la alta.

Apariţia matematicii greceşti nu va porni aşadar dintr-un singur loc, unde toţi savanţii se cunosc şi se întâlnesc zi de zi, ci dintr-o zonă vastă din punct de vedere geografic şi cultural. Contactul dintre cele mai vechi civilizaţii va constitui unul dintre motoarele revoluţiei matematice, revoluţie care va deveni moste- *t * t t* nitoarea şi fermentul pentru propria-i diversitate. Vor exista numeroşi savanţi care vor efectua în timpul vieţii un pelerinaj în Egipt sau în Orientul Mijlociu, ca pe o călătorie obligatorie pentru formarea lor. O bună parte dintre matematicienii babilonieni şi egipteni se vor regăsi astfel integraţi şi continuaţi de către savanţii greci.

Pe coasta de sud-est a Turciei actuale, în oraşul Milet, la sfârsitul secolului al Vll-lea înaintea erei noas-[1] *t* tre, se va naşte Thales, primul mare matematician grec. în ciuda numeroaselor surse care îl menţionează, este totuşi greu astăzi să extragem informaţiile veridice cu privire la viaţa şi lucrările sale. Precum în cazul multor savanţi ai acestei epoci, diferite legende vor fi născocite după moartea sa de către discipolii cam zeloşi, legende care merg până într-acolo încât este dificil să mai deosebim între adevăr şi fals. Oamenii de ştiinţă ai acestei epoci nu obişnuiau să se încurce cu eticile prea constrângătoare şi nu era deloc o raritate să remarci că negociau cu adevărul când acesta nu era conform gusturilor lor.

Printre numeroasele poveşti care circulă despre el se spune, de exemplu, că Thales era foarte distrat. Savantul milesian ar fi fost unul dintre primele exemplare cu capul în nori dintr-o lungă tradiţie de savanţi. O anecdotă zice că, într-o noapte, a căzut într-un puţ în timp ce se plimba cu nasul pe sus, observând stelele. O alta ne spune că a murit în jurul vârstei de 80 de ani în vreme ce asista la o competiţie sportivă; era atât de captivat de spectacol, încât a uitat să bea şi să mănânce.

Realizările sale stiintifice sunt si ele obiectul unor

; ; t
povestiri interesante. Thales ar fi fost primul care a prezis în mod corect o eclipsă de Soare. Această eclipsă a apărut în plină bătălie între Medes şi lydieni, pe malurile fluviului Halys, în vestul Turciei de azi. Văzând că se face noapte în plină zi, combatanţii au crezut că e un mesaj al zeilor şi s-au decis imediat să încheie tratatul de pace. Astăzi, a prezice eclipsele sau a le reconstitui pe cele din trecut a devenit un joc de copii pentru astronomi. Datorită lor ştim că această eclipsă a avut loc în 28 mai 584 înaintea erei noastre, făcând din bătălia de la Halys evenimentul istoric cel mai vechi pe care îl putem data cu o asemenea precizie.

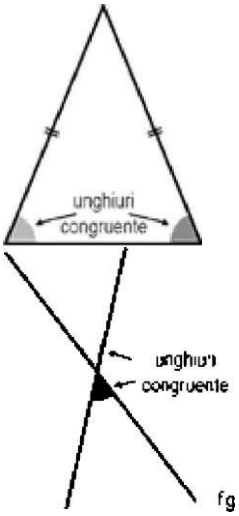
în cursul călătoriei lui Thales în Egipt, acesta va realiza ceea ce mai târziu va fi considerată cea mai mare reuşită a sa. Se povesteşte că însuşi faraonul Amasis i-a lansat provocarea de a măsura înălţimea Marii Piramide. Până atunci, savanţii egipteni care au fost consultaţi în vederea acestui lucru au eşuat cu totii. Thales nu nu-
; t
mai că va face faţă provocării, dar o va face foarte elegant, folosindu-se de o metodă extrem de îndrăzneaţă. Savantul milesian va înfige un băţ perfect vertical în sol şi va aştepta momentul zilei în care lungimea umbrei va fi egală cu înălţimea. în acel moment, a măsurat umbra piramidei, care

şi ea era egală cu înălţimea. Iată cum a făcut faţă provocării!

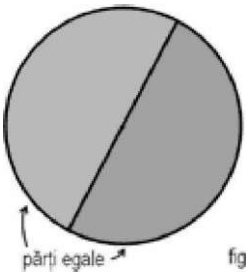
¿7

Desigur că povestea este drăguţă, dar încă o dată realitatea sa istorică rămâne nesigură. Aşa cum este povestită, anecdota îi pune într-o lumină foarte proastă pe savanţii egipteni ai epocii, deşi papirusuri precum cel al lui Ahmes ne arată că egiptenii ştiau foarte bine să calculeze înălţimea piramidelor cu mai mult de o mie de ani înainte de sosirea lui Thales. Atunci, unde este adevărul? A măsurat într-adevăr înălţimea piramidei? A fost el primul care a utilizat metoda umbrei? Nu cumva el a măsurat înălţimea unui măslin din faţa casei sale din Milet şi discipolii lui sunt cei care au înfrumuseţat povestea după moartea sa? Probabil că niciodată nu vom şti adevărul.

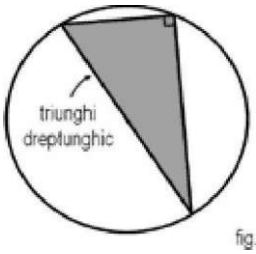
înS 'iiţoa ptriiniKfo



Orice ar fi, geometria lui Thales se verifică şi, indiferent dacă a aplicat-o la o piramidă sau la un măslin, metoda umbrei rămâne într-adevăr genială. Ea constituie un caz particular al unei proprietăţi căreia îi dăm astăzi numele său: teorema lui Thales. Multe alte rezultate matematice îi sunt atribuite lui Thales: cercul este împărţit în două părţi egale de orice diametru (fig. 1), unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt egale (fig. 2), două drepte secante au unghiurile opuse la vârf egale (fig. 3), dacă un triunghi are toate cele trei vârfuri pe un cerc şi o latură trece prin centrul cercului, atunci acest triunghi este dreptunghic (fig. 4). Şi acest din urmă enunţ mai poartă câteodată numele de teorema lui Thales.



fig



fig

Ajungem astfel la acest cuvânt straniu care, pe cât de mult fascinează, pe atât de mult provoacă frică: ce este o teoremă? Din punct de vedere etimologic, cuvântul provine din rădăcinile greceşti *thea* (contemplare) şi *horâd (a* vedea, a privi). Astfel, o teoremă ar fi un fel de observaţie asupra lumii matematice, un fapt care ar fi fost constatat, examinat şi apoi consemnat de către matematicieni. Teoremele pot fi transmise oral sau în scris şi seamănă cu reţetele bunicii sau cu proverbele meteorologice care au fost dovedite de-a lungul timpului şi în adevărul cărora avem încredere. Rândunelele vestesc primăvara, dafinul calmează reumatismul şi triunghiul 3-4-5 are un unghi drept. Acestea sunt lucruri pe care le considerăm adevărate şi pe

care căutăm să ni le amintim pentru a le reutiliza în anumite momente.

Conform acestei definiţii, mesopotamienii, egiptenii şi chinezii îşi enunţau şi ei teoremele. Totuşi, începând cu Thales, grecii le vor da acestora o nouă dimensiune. Pentru ei, o teoremă nu trebuie să enunţe doar un adevăr matematic, ci acesta trebuie să fie formulat în modul cel mai general cu putinţă şi să fie însoţit de o demonstraţie care îl validează.

Să revenim asupra uneia dintre propoziţiile atribuite lui Thales: diametrul unui cerc îl împarte pe acesta în două părţi egale. O asemenea afirmaţie poate părea dezamăgitoare venind din partea unui savant de anvergura lui Thales. Este evident că asa stau lucrurile. Cum de a trebuit să aşteptăm secolul al Vl-lea înaintea erei noastre pentru ca o asemenea afirmaţie banală să fie enunţată? Nimeni nu pune la îndoială că savanţii egipteni şi babilonieni ştiau acest lucru de mult timp.

Totuşi nu trebuie să ne grăbim. Ceea ce face îndrăzneaţă ideea savantului milesian nu constă atât în conţinu-

; t

tul, cât în formularea sa. Thales îndrăzneşte să vorbească despre un cerc fără să precizeze care este acesta. Pentru a enunţa aceeaşi regulă, babilonienii, egiptenii sau chinezii ar fi dat un exemplu. Trasaţi un cerc de rază 3 şi unul dintre diametrele sale, ar fi spus aceştia; acest cerc este

divizat în două părţi egale de către acest diametru. Iar dacă un exemplu nu era suficient pentru a înţelege regula, se dădeau un al doilea, un al treilea, un al patrulea exemplu dacă era nevoie. Se dădeau atâtea exemple câte erau necesare pentru ca interlocutorul să înţeleagă că şi el poate să repete aceeaşi operaţie pentru oricare cerc pe care l-ar întâlni. Dar niciodată nu este formulată afirmaţia generală!

Thales a depăşit o limită. Luaţi un cerc, oricare ar fi el, nu mă interesează să stiu! Poate fi imens sau minuscul! Desenaţi-l pe orizontală, pe verticală sau pe un plan înclinat, îmi este indiferent! Nu mă interesează deloc cercul dumneavoastră în particular şi nici nu mă interesează modalitatea în care l-aţi desenat! Cu toate acestea, afirm cu putere că diametrul său îl va tăia în două părţi egale.

Prin această operaţie, Thales acordă definitiv figurilor geometrice statutul de obiecte matematice abstracte. Această etapă a gândirii este asemănătoare cu cea care i-a făcut cu două mii de ani mai devreme pe mesopotamieni să considere numerele ca fiind independente de obiectele numărate. Un cerc nu mai este o figură desenată pe pământ, pe o tăbliţă sau pe un papirus. Cercul devine o ficţiune, o idee, un ideal abstract ale cărui reprezentări reale, oricare ar fi acestea, nu sunt decât avataruri imperfecte ale lui.

De acum încolo, adevărurile matematice vor putea fi enunţate concis şi general, independent de diferitele cazuri particulare în care se aplică. Din acest moment, grecii vor numi aceste enunţuri teoreme.Thales a avut mai mulţi discipoli în Milet. Doi dintre aceştia, cei mai cunoscuţi, au fost Anaximene şi Anaximandru. Anaximandru a avut la rândul său discipoli şi printre ei s-a numărat un anume Pitagora, care va da numele său uneia dintre cele mai cunoscute teoreme din toate timpurile.

Pitagora s-a născut la începutul secolului al Vl-lea înaintea erei noastre în insula Samos, situată în regiunea
Turciei de astăzi, la doar câţiva kilometri de oraşul Milet.
[1] *t t*
După o tinereţe petrecută în călătorii de studii în lumea antică, Pitagora şi-a ales ca domiciliu oraşul Crotona, în sud-estul Italiei de astăzi. Aici va fonda şcoala sa în anul -532[I].

Pitagora şi discipolii lui nu sunt doar matematicieni
si oameni de stiintă. Ei sunt totodată si filosofi, oameni
t t t t '
religioşi şi oameni politici. Trebuie totuşi să spunem că, dacă am transpune în epoca noastră comunitatea iniţiată de Pitagora, atunci aceasta

---

I Autorul foloseşte numere negative pentru a identifica anii dinainte de Hristos. *(N.r.)* '

ar fi considerată fără îndoială o sectă extrem de obscură şi periculoasă. Existenţa pitagoreicilor era coordonată de un ansamblu de reguli precise. Oricine dorea să facă parte din această şcoală era nevoit să petreacă o perioadă de cinci ani în linişte. Pitagoreicii nu deţin nimic personal; toate bunurile lor sunt puse în comun. Pentru a se recunoaşte între ei, aceştia folosesc diferite simboluri, precum tetractisul sau pentagrama în formă de stea cu cinci colţuri. De altfel, pitagoreicii se consideră persoane iluminate şi socotesc că este normal ca puterea politică să le aparţină. Aceştia se opun cu fermitate revoltelor care au loc în oraşele ce le refuză autoritatea. Chiar într-o astfel de răscoală Pitagora îşi va găsi moartea, la vârsta de 85 de ani.

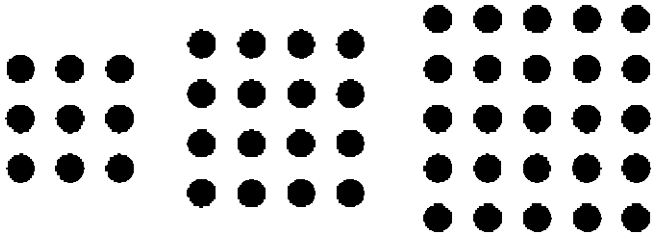
Numărul legendelor de toate felurile inventate în jurul lui Pitagora este cu adevărat impresionant. Discipolii săi nu au fost deloc lipsiţi de imaginaţie, judecaţi singuri: după ei, Pitagora ar fi fost fiul zeului Apollo. De altfel, chiar numele său, Pitagora, înseamnă literal „cel care a fost anunţat de către Pythia”, adică Pythia din Delphi, respectiv oracolul templului lui Apollo, şi chiar aceasta i-a înştiinţat pe părinţii lui Pitagora de viitoarea naştere a urmaşului lor. Conform oracolului, Pitagora trebuia să devină cel mai frumos şi cel mai înţelept dintre oameni, încă din naştere, savantul grec era predestinat marilor realizări. Pitagora îşi aducea aminte de toate vieţile sale anterioare. De exemplu, el spunea că

a fost unul dintre eroii războiului troian şi purta numele de Euphorbe. în tinereţe, Pitagora a participat la Jocurile Olimpice şi a câştigat toate probele de pugilat (strămoşul boxului de azi). Pitagora este inventatorul primelor game muzicale. Era capabil să meargă prin aer. A murit şi a fost readus la viaţă. Avea talente de ghicitor şi de vindecător. Controla animalele. Avea o coapsă de aur.

Dacă majoritatea legendelor sunt destul de ciudate pentru a le acorda atenţie, pentru altele, în schimb, este greu să ne pronunţăm. De exemplu, este oare adevărat că Pitagora a fost primul care a utilizat cuvântul „matematică”? Faptele sunt atât de îndoielnice, încât anumiţi istorici au susţinut chiar ipoteza că Pitagora nu a fost decât un personaj fictiv, imaginat de pitagoreici pentru a le servi drept figură tutelară.

în aceste condiţii, dacă nu putem să aflăm mai multe despre omul Pitagora, să revenim la ceea ce toţi elevii din lume ştiu de mai bine de două mii de ani după moartea sa: teorema lui Pitagora. Ce ne spune această vestită teoremă? Enunţul său poate părea uimitor, căci el stabileşte o legătură între două noţiuni matematice care par să nu aibă un raport între ele: triunghiurile dreptunghice şi numerele pătrate.

Să reluăm triunghiul nostru dreptunghic preferat, cel cu dimensiunile 3-4-5. Pornind de la lungimile celor trei laturi ale sale, este posibil să construim trei numere pătrate 9, 16, 25.



9 16 25

Putem observa o coincidentă amuzantă: 9 + 16 = 25. Suma pătratelor laturilor 3 şi 4 este egală cu pătratul laturii de 5. Am putea crede că este vorba de o întâmplare, dar, cu toate acestea, dacă am încerca să reproducem calculul cu un alt triunghi dreptunghic, vom vedea că regula merge în continuare aplicată. Să luăm de exemplu triunghiul 65-72-97, pe care îl găsim pe tăbliţa babiloniană Plimpton. Cele trei numere pătrate sunt 4 225, 5 184 şi 9 409. Şi iarăşi vom regăsi rezultatul: 4 225 + 5 184 = 9 409. Cu astfel de numere mari este greu să mai credem că este vorba de o simplă coincidenţă.

Puteţi să încercaţi cu toate triunghiurile dreptun- ghice pe care le doriţi - mici sau mari, înguste sau largi -, veţi regăsi mereu aceleaşi rezultate. într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor celor două laturi care formează unghiul drept este întotdeauna egală cu pătratul celei de-a treia laturi, pe care o vom numi ipotenuză. De asemenea, lucrurile merg şi în sens invers: dacă într-un triunghi suma pătratelor celor două laturi mai mici este egală cu pătratul

laturii mai mari, atunci avem de-a face cu un triunghi dreptunghic. Iată teorema lui Pitagora!

Bineînţeles că nu ştim dacă Pitagora sau discipolii săi au contribuit în mod real la această teoremă. Cu toate că babilonienii nu au menţionat-o niciodată sub forma generală pe care tocmai am văzut-o, este foarte probabil ca ei să fi cunoscut deja acest rezultat cu mai mult de două mii de ani înaintea lui Pitagora. Altfel cum ar fi putut să descopere cu atât de mare precizie toate triunghiurile dreptunghice prezente pe tăbliţa Plimpton? Probabil că şi egiptenii, şi chinezii aveau cunoştinţă de această teoremă. Ea va fi, de altfel, enunţată în mod clar în comentariile care vor fi adăugate celor *Nouă capitole* în secolele care au urmat redactării sale.

Anumite povestiri pretind că Pitagora ar fi fost primul care a realizat o demonstraţie a acestei teoreme. Nicio sursă de încredere nu ne poate confirma acest lucru, iar cea mai veche demonstraţie care ne-a parvenit nu se găseşte decât în *Elemente de matematică*, scrisă de Euclid trei secole mai târziu

.Un pic de metodă

Problema dovezii va constitui una dintre principalele preocupări ale matematicii greceşti. Nicio teoremă nu poate fi validată dacă nu este însoţită de o demonstraţie, adică de un raţionament logic precis care stabileşte în mod definitiv veridicitatea sa. Trebuie să spunem că, fără această plasă de siguranţă pe care o reprezintă demonstraţiile, rezultatele matematice ne pot rezerva unele surprize neplăcute. Anumite metode, cu toate că sunt recunoscute şi larg utilizate, nu funcţionează întotdeauna la fel de bine precum acestea.

Iată! Vă aduceţi aminte de construcţia din papirusul Rhind pentru a trasa un pătrat şi un disc având aceeaşi arie? Ei bine, ea este falsă. Nu cu mult, este adevărat, dar este totuşi falsă. Când măsurăm cu precizie suprafeţele, găsim o diferenţă de aproximativ 0,5%. Suntem de acord că pentru cei care măsoară sau alţi geometri de teren o asemenea precizie este mai mult decât suficientă, dar pentru teoreticienii matematicii acest lucru este inadmisibil.

însuşi Pitagora va pica în capcana falselor ipoteze. Cea mai cunoscută eroare a sa priveşte lungimile comensurabile. Astfel, el crede că în geometrie două lungimi sunt întotdeauna comensurabile, adică este posibil să găsim o unitate suficient de mică pentru a le putea măsura simultan. Imaginaţi-vă o linie de 9 cm şi o alta de 13,7 cm. Grecii nu cunoşteau numerele cu

virgulă. Ei nu măsurau lungimile decât cu numere întregi. Astfel, pentru ei, cea de-a doua linie nu este măsurabilă în centimetri. Dar nu contează, este suficient în acest caz să luăm o unitate de 10 ori mai mică pentru a spune că liniile măsoară 90 şi, respectiv, 137 de milimetri. Pitagora era convins că oricare ar fi cele două linii, oricare ar fi lungimile lor, ele pot fi întotdeauna comensurate dacă se găseşte unitatea de măsură adecvată.

Această convingere a fost totuşi infirmată de către un pitagoreic numit Hippasos din Metapont. El a descoperit că într-un pătrat latura şi diagonala sunt incomensurabile. Orice unitate de măsură am lua, nu este posibil să măsurăm cu numere întregi, în acelaşi timp, şi latura pătratului, şi diagonala sa. Hippasos a furnizat o demonstraţie logică, nelăsând loc de îndoială cu privire la acest aspect. Pitagora şi discipolii săi au fost atât de contrariaţi, încât Hippasos a fost exclus din şcoala respectivă. Se povesteşte că această descoperire l-a costat chiar viaţa, deoarece a fost dus pe mare şi aruncat peste bord de către colegii săi.

Pentru matematicieni, aceste anecdote sunt înspăimântătoare. Putem oare să fim vreodată siguri de ceva? Să trăim cu frica permanentă că fiecare descoperire matematică se va nărui într-o zi? Chiar şi triunghiul 3-4-5? Este oare sigur că avem de-a face cu un triunghi drept- unghic? Nu riscăm ca într-o zi să descoperim că unghiul care

până acum părea perfect drept este de fapt *aproape* drept?

Chiar şi astăzi, nu arareori întâlnim matematicieni care cad pradă intuiţiilor înşelătoare. Iată de ce, mergând pe urmele rigorii omologilor greci, matematicienii noştri au mare grijă să facă diferenţa între enunţurile demonstrate pe care le numesc „teoreme” şi cele pe care le consideră adevărate, dar pentru care nu au găsit încă o dovadă, iar pe acestea din urmă le numesc „conjecturi”.

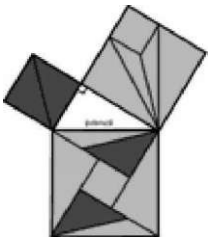
Una dintre celebrele conjecturi ale timpurilor noastre este ipoteza lui Riemann. Numeroşi matematicieni au destul de multă încredere în veridicitatea acestei ipoteze, încă nedemonstrată, pentru a o pune la baza cercetărilor lor. Nu trebuie decât să aşteptăm ca într-o zi această conjectură să devină teoremă şi astfel toate lucrările lor vor fi validate. Dar dacă într-o zi aceasta va fi infirmată, atunci operele de o viaţă întreagă de cercetare ale matematicienilor respectivi se vor nărui împreună cu ea. Oamenii de ştiinţă ai secolului XXI sunt fără îndoială mult mai rezonabili decât strămoşii lor greci, deşi se poate înţelege că în aceste condiţii matematicianul care ar anunţa falsitatea ipotezei lui Riemann va putea stârni invidii puternice printre colegii săi.

Ca să scape de această angoasă permanentă de a fi invalidaţi, matematicienii au nevoie de demonstraţii. Nu, nu vom descoperi niciodată că

3-4-5 nu este un triunghi dreptunghic. Suntem siguri de asta, iar această certitudine provine din faptul că teorema lui Pitagora are o demonstraţie. Orice triunghi care are suma pătratelor a două laturi egală cu pătratul celei de-a treia este un triunghi dreptunghic. Fără îndoială că acest enunţ nu era decât o conjectură pentru mesopotamieni. Ea a devenit teoremă odată cu grecii. Noroc cu ei!

Dar, de fapt, ce este o demonstraţie? Teorema lui Pitagora nu este doar cea mai faimoasă dintre teoreme,
ci este totodată si una dintre cele care deţin cel mai mare
; t
număr de demonstraţii diferite. Există mai multe zeci de astfel de demonstraţii. Unele dintre acestea au fost descoperite, independent, de civilizaţii care nu au auzit niciodată vorbindu-se despre Euclid sau despre Pitagora. Este, de exemplu, cazul demonstraţiilor pe care le găsim în comentariile celor *Nouă capitole* chinezeşti. Altele sunt opera unor matematicieni care cunoşteau teorema deja demonstrată, dar care, provocaţi fiind sau pentru a-şi pune amprenta personală, s-au amuzat în a aduce noi dovezi. Printre aceştia din urmă se numără câteva nume celebre, precum cel al inventatorului italian Leonardo da Vinci sau al celui de-al douăzecilea preşedinte al Statelor Unite, James Abram Garfield.

Unul dintre principiile pe care le regăsim în mai multe demonstraţii este acela al puzzle-ului: dacă două figuri geometrice pot fi formate plecând de la aceleaşi piese, atunci ele au aceeaşi suprafaţă. Priviţi acest decupaj imaginat de matematicianul chinez din secolul al III-lea Liu Hui.



Cele două pătrate construite pe laturile care formează unghiul drept al triunghiului dreptunghic central sunt alcătuite din două şi respectiv cinci piese. Toate acestea şapte sunt cele care alcătuiesc pătratul construit pe ipotenuză. Suprafaţa pătratului de pe ipotenuză este deci egală cu suma suprafeţelor celor două pătrate mai mici. Iar cum suprafaţa unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii sale, vedem în mod clar că teorema lui Pitagora este adevărată.

Trecem aici peste detalii, dar desigur că ar fi convenabil, pentru ca demonstraţia să fie completă, să arătăm că toate piesele sunt perfect identice şi că un asemenea decupaj funcţionează pentru toate triunghiurile dreptunghice.

Pe scurt, să reluăm lanţul deductiv. De ce 3-4-5 este triunghi dreptunghic? Deoarece verifică teorema lui Pitagora. Şi de ce teorema lui Pitagora este adevărată? Deoarece decupajul lui Liu Hui ne arată că pătratul de pe ipotenuză este alcătuit din aceleaşi piese care alcătuiesc cele două pătrate construite pe laturile care formează unghiul drept. Demonstraţia seamănă cu un joc al lui „de ce”, de care copiii se bucură atât de mult. Problema este că acest joculeţ are dezavantajul că nu se termină niciodată. Oricare ar fi răspunsul dat unei întrebări este mereu posibil să punem din nou sub semnul întrebării acest răspuns. De ce? Da, de ce?

Să revenim la puzzle-ul nostru. Am spus că, dacă există figuri care se compun cu aceleaşi piese, acestea vor avea aceeaşi suprafaţă. Dar am demonstrat oare că acest principiu este mereu adevărat? Nu am putea să găsim piese ale puzzle-ului a căror suprafaţă să varieze după modul în care le asamblăm? Nu-i aşa că o astfel de afirmaţie pare absurdă? într-atât de absurdă, încât ar fi exagerat să încercăm să o demonstrăm?! Totuşi, tocmai recunoşteam cât este de important să demonstrăm totul în matematică. Suntem deja gata să renunţăm la principiile noastre chiar imediat după ce le-am adoptat?

Situaţia e gravă, cu atât mai mult cu cât, chiar dacă am reuşi să explicăm de ce principiul puzzle-ului este adevărat, ar trebui încă să

justificăm raţionamentele pe care le utilizăm în vederea acestui lucru.

Matematicienii greci erau conştienţi de această problemă. Pentru a face o demonstraţie, trebuie totuşi să plecăm de undeva. Dar prima frază a oricărei lucrări de matematică nu poate fi demonstrată. Mai precis, deoarece aceasta este… prima. Orice construcţie matematică trebuie deci să înceapă prin a admite un anumit număr de evidenţe prealabile. Aceste evidenţe vor constitui fundamentul tuturor deducţiilor care vor urma şi trebuie, aşadar, alese cu foarte mare grijă.

Matematicienii numesc „axiome” aceste evidenţe. Axiomele sunt enunţuri matematice, aşa cum pot fi teoremele şi conjecturile, dar spre deosebire de acestea nu au demonstraţii si nici nu se caută una. Ele sunt admise ca fiind adevărate.

Elemente de matematică, lucrare scrisă în secolul al III-lea înaintea erei noastre de Euclid, constituie un ansamblu de treisprezece cărţi care tratează, în principal, geometria şi aritmetica.

Nu ştim mare lucru despre Euclid, iar sursele cu privire la el sunt mult mai rare decât în cazul lui
Thales sau Pitagora. Este posibil să fi trăit în apropierea Alexandriei. Alte surse au vorbit, ca şi în cazul lui Pitagora, despre posibilitatea să nu fi fost o singură persoană, ci numele unui colectiv de savanţi. Nu se ştie cu siguranţă!

în ciuda puţinelor informaţii pe care le avem despre el, Euclid ne-a lăsat odată cu *Elementele* o operă monumentală. Această lucrare este considerată în unanimitate unul dintre cele mai mari texte ale istoriei matematicii, pentru că a fost primul care a folosit o abordare de tip axiomatic. Construcţia *Elementelor* este uimitor de modernă, iar structura sa este foarte apropiată de cea care este folosită astăzi de matematicienii zilelor noastre. La sfârsitul secolului al XV-lea, *Elementele* se vor nu- măra printre primele lucrări tipărite de către Gutenberg. Opera lui Euclid constituie astăzi al doilea text care a avut parte de cele mai multe reeditări în istorie, imediat după Biblie.

în prima carte a *Elementelor*, care tratează geometria plană, Euclid enunţă următoarele cinci axiome.

1. *Un segment de dreaptă poate fi trasat unind două puncte oarecare.*
2. *Un segment de dreaptă poate fi prelungit nedefinit în ambele părţi.*
3. *Dat fiind un segment, este posibil să trasăm un cerc a cărui rază este acest segment şi centrul îl reprezintă una dintre extremităţile segmentului.*
4. *Toate unghiurile drepte se pot suprapune.*
5. *Dacă două linii drepte sunt secante cu o a treia - astfel încât suma unghiurilor interioare unei laturi este mai*

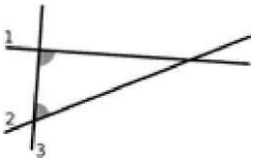
mică decât două unghiuri drepte - atunci aceste două linii sunt secante pe aceeaşi parte:

După acestea urmează o mulţime de teoreme impecabil demonstrate. Pentru fiecare dintre ele, Euclid nu utilizează nimic altceva în afara celor cinci axiome sau rezultatele pe care le-a stabilit în prealabil. Ultima teoremă a primei cărţi este o cunoştinţă mai veche a noastră, deoarece este vorba despre teorema lui Pitagora.

După Euclid, numeroşi matematicieni se vor apleca la rândul lor asupra chestiunii alegerii axiomelor. Mai
exact, mulţi au fost uimiţi si deturnati de cea de-a cincea
' ; / ; t
axiomă. Astfel, ultima este mult mai puţin elementară decât celelalte patru la un loc. Câteodată va fi înlocuită de un alt enunţ, mai simplu, dar care ne permite să ajungem la aceeaşi concluzie: *Printr-un punct exterior unei drepte putem trasa o singură dreaptă paralelă la dreapta dată*. Dezbaterile în legătură cu alegerea celei de-a cincea axiome au durat până în secolul al XlX-lea, când s-a ajuns la crearea unor noi modele geometrice, în care această axiomă este una falsă!

Această axiomă, în mod clar mult mai complexă decât celelalte patru, va provoca numeroase dezbateri între matematicieni. Pe figura de mai jos putem observa că suma celor două unghiuri indicate este mai mică decât două unghiuri drepte. Prin urmare dreptele 1 şi 2 sunt secante pe partea acestor două unghiuri. *(N.a.)*

Un pic de metoda



Enunţul axiomelor pune o altă problemă, anume aceea a definiţiilor. Ce semnifică de fapt toate aceste cuvinte folosite, precum puncte, segmente, unghiuri sau cercuri? La fel ca în cazul demonstraţiilor, chestiunea definiţiilor este fără sfârsit. Prima definiţie enunţată trebuie

t t t

să fie bine exprimată, folosind termeni care să nu fi fost definiţi înainte. în *Elemente*, definiţiile preced axiomele. Prima frază a primei cărţi defineşte punctul.

Punctul este ceva ce nu are părţi

Ei, poftim, descurcaţi-vă cu asta! Ceea ce doreşte să spună Euclid prin această definiţie este că punctul reprezintă cea mai mică figură geometrică posibilă. Este imposibil să facem puzzle-uri cu un punct. Nu poate fi tăiat şi deci nu are părţi. în 1632, în una dintre primele ediţii în limba franceză a *Elementelor*; matematicianul Denis Henrion îmbogăţeşte puţin definiţia în comentariile sale, spunând că punctul nu are nici lungime, nici lăţime, nici grosime.

Aceste definiţii negative ne fac sceptici. A spune ce nu este un punct nu înseamnă a spune cu adevărat ceea ce este! Totuşi cine ar putea să propună o definiţie mai bună? în unele manuale şcolare de la începutul secolului XX regăsim

câteodată definiţia următoare: *Un punct este urma lăsată de un creion fin ascuţit pe care îl sprijinim pe o foaie de hârtie*. Un creion bine ascuţit! De astă dată, iată-ne ancoraţi în concret. Totuşi, definiţia aceasta i-ar fi făcut pe Euclid, Pitagora şi Thales să sară enervaţi, având în vedere că şi-au bătut atât de mult capul să creeze figuri geometrice pentru obiectele abstracte şi idealizate. Niciun creion, oricât de bine ascuţit ar fi, nu ar putea să lase o urmă care să nu aibă nici lungime, nici lăţime, nici grosime.

Pe scurt, nimeni nu ştie cu adevărat să spună ce este un punct, dar toată lumea e aproape convinsă că ideea este suficient de simplă şi clară pentru a nu genera ambiguităţi. Suntem cu toţii aproape siguri că vorbim despre acelaşi lucru când utilizăm cuvântul *„punct”.*

Tocmai pe acest act de credinţă al primelor definiţii şi axiome se va construi întreaga geometrie. Şi din lipsă de ceva mai bun, pe acelaşi model se va construi toată matematica modernă.

Definiţii - Axiome - Teoreme - Demonstraţii: iată calea indicată de Euclid, care determină ceea ce va deveni rutină pentru matematicienii care vor veni după el. Totuşi, cu toate că teoriile se structurează şi se amplifică, iată că alte pietricele se vor strecura în pantofii matematicienilor: paradoxurile.

Un paradox reprezintă un lucru care ar trebui să meargă, dar nu merge. Este o aparentă

contradicţie insolubilă. Este un raţionament care pare perfect just, dar care ne conduce totuşi spre un rezultat complet absurd. Imaginaţi-vă puţin că stabiliţi o listă de axiome care vi se pare a fi incontestabilă şi din care totuşi deduceţi teoreme care sunt în mod evident false. Ar fi un coşmar!

Unul dintre celebrele paradoxuri îi este atribuit lui Eubulide din Milet şi priveşte vorbele enunţate de poetul Epimenide. Acesta din urmă ar fi spus într-o zi: „Cretanii sunt mincinoşi”. Problema este că Epimenide era el însuşi cretan. Prin urmare, dacă este adevărat ceea ce spune, atunci este un mincinos şi deci ceea ce spune este fals. Iar dacă, din contră, propoziţia sa este falsă, atunci el minte, dar propoziţia spune adevărul. Mai multe variante ale acestui paradox vor apărea mai târziu, cel mai simplu dintre ele fiind acela când o persoană care declară: „Eu mint”.

Paradoxul mincinosului readuce la lumină o idee preconceptă care susţine că orice propoziţie trebuie să fie adevărată sau falsă. Nu există o a treia posibilitate, în matematică, acest lucru poartă numele de principiul terţului exclus. La prima vedere ar fi foarte tentant să facem din acesta o axiomă. Totuşi paradoxul mincinosului ne pune în gardă: situaţia este mult mai complexă decât atât! Dacă un enunţ afirmă propria-i falsitate, atunci nu poate fi în mod logic nici adevărat, nici fals.

Această curiozitate nu-i va împiedica pe cei mai mulţi matematicieni, până în zilele noastre, să considere ca adevărat terţul exclus. La urma urmei, paradoxul
mincinosului nu este în mod real un enunţ matematic si
; t
am putea să-l considerăm, cu atât mai mult, drept o incoerenţă de natură lingvistică decât o contradicţie logică. Totuşi, la mai mult de două mii de ani după Eubulide, logicienii vor descoperi că paradoxuri de acelaşi fel pot să apară în miezul celor mai riguroase teorii, generând o bulversare profundă a matematicii.

Zenon din Elea, care a trăit în secolul al V-lea înaintea erei noastre, trece şi el drept unul dintre maeştrii în arta creării paradoxurilor. I se atribuie aproape zece paradoxuri. Unul dintre celebrele lui paradoxuri este acela cu Ahile si testoasa.

Imaginaţi-vă un concurs de alergat între Ahile, care este un atlet deosebit, şi o ţestoasă. Pentru a echilibra şansele, acordăm ţestoasei un anumit avans; să spunem, vreo sută de metri. în ciuda acestui avans, pare de la sine înţeles că Ahile, alergând mult mai repede decât ţestoasa, va ajunge ca mai devreme sau mai târziu să o prindă din urmă. Totuşi Zenon ne spune contrariul.

Să observăm concursul, ne spune el, ca împărţit în mai multe etape. Pentru a ajunge din urmă ţestoasa, Ahile trebuie, cel puţin, să alerge

cei o sută de metri care îl separă de aceasta. în timp ce el străbate această sută de metri, ţestoasa va înainta şi ea puţin şi va rămâne aşadar încă o mică distanţă de parcurs pentru Ahile. Dar, după ce el a parcurs şi această distanţă, ţestoasa între timp a mai avansat. Deci Ahile trebuie din nou să alerge o bucăţică de drum la capătul căruia s-ar afla ţestoasa, dar ea a mai înaintat deja între timp.

Pe scurt, de fiecare dată când Ahile atinge punctul precedent ocupat de ţestoasă, aceasta a avansat puţin, şi astfel niciodată nu poate fi ajunsă din urmă. Iar acest lucru rămâne adevărat indiferent de numărul de etape pe care îl luăm în considerare. Ahile pare condamnat să se apropie din ce în ce mai mult de ţestoasă, fără a o putea depăşi vreodată.

Absurd, nu-i aşa? Este suficient să facem experienţa pentru a constata că alergătorul va ajunge să depăşească testoasa foarte uşor. Totuşi raţionamentul pare să se sus-
; ; ; ; r
ţină şi pare greu să-i găsim vreo eroare logică.

Le va trebui mult timp matematicienilor pentru a înţelege acest paradox care se joacă abil cu infinitul.

Dacă cei care concurează aleargă în linie dreaptă, traiectoria lor poate fi asimilată cu ceea ce Euclid numeşte un segment. Un astfel de segment are o lungime finită, cu toate că este

alcătuit dintr-o infinitate de puncte care au toate o lungime egală cu zero.

într-un anumit sens, există, aşadar, infinit în cadrul finitului. Paradoxul lui Zenon decupează intervalul temporal de care are nevoie Ahile să ajungă din urmă testoasa într-o infinitate de intervale din ce în ce mai mici. Această infinitate de etape ţine totuşi foarte bine de un timp finit, iar acest lucru nu-l va împiedica cu nimic pe Ahile să ajungă din urmă ţestoasa odată cu trecerea timpului.

Noţiunea de infinit în matematică va fi, fără îndoială, cea mai mare sursă de paradoxuri, dar şi sursa celor mai fascinante teorii.

De-a lungul istoriei, matematicienii vor avea o relaţie ambiguă cu paradoxurile. Pe de o parte, acestea reprezintă cel mai mare pericol. Dacă se arată într-o zi că o teorie se întemeiază pe un paradox, atunci tot fundamentul său şi deci toate teoremele pe care credeam că le-am construit pe aceste axiome se vor nărui. Dar, pe de altă parte, ce provocare!

Paradoxurile sunt o sursă foarte prolifică şi emoţionantă de punere sub semnul întrebării. Dacă avem un paradox, atunci ceva ne-a scăpat din vedere. înseamnă că am înţeles greşit o noţiune, am dat o definiţie proastă sau am ales o axiomă în mod greşit. înseamnă că am luat un lucru drept o evidenţă, deşi se dovedeşte că nu e chiar aşa. Paradoxurile reprezintă o invitaţie la aventură, o invitaţie la a regândi în profunzime

lucrurile pe care le considerăm a fi evidente. Oare pe lângă câte idei noi şi teorii originale am fi trecut, dacă nu ar fi existat paradoxurile să ne împingă către acestea?
Paradoxurile lui Zenon vor inspira noi concepţii despre infinit şi măsură. Paradoxul mincinosului îi va angaja pe logicieni într-o căutare din ce în ce mai rafinată a noţiunilor de adevăr si de demonstrabilitate. ; /
Chiar şi astăzi, numeroşi cercetători disecă matematica aflată deja în germene în paradoxurile savanţilor greci.

în 1924, matematicienii Ştefan Banach şi Alfred Tarski au adus la lumina zilei un paradox care le poartă astăzi numele şi care repune în discuţie însuşi principiul puzzle-ului. Oricât de evident ar putea să ne pară, acest principiu eşuează. Banach şi Tarski au fost capabili să descrie un puzzle în trei dimensiuni, al cărui volum nu este acelaşi în funcţie de modul în care îmbinăm piesele. Vom reveni asupra acestui aspect. Piesele pe care ei le vor imagina sunt atât de stranii şi de uimitoare, încât nu au nimic de-a face cu figurile geometrice pe care le manipulau geometrii greci. Staţi liniştiţi, principiul puzzle-ului rămâne valabil atâta timp cât piesele au formă de triunghi, de pătrat sau alte figuri clasice. Dovada lui Liu Hui asupra teoremei lui Pitagora rămâne valabilă în continuare.

8

Dar fie ca acest lucru să ne fie învăţătură de minte! Să avem grijă cu evidenţele şi să ne lăsăm uimiţi şi surprinşi de misterele acestei lumi matematice pe care savanţii greci au deschis-o pentru noi.De la 7T la si mai si

//

Pe 14 martie 2015 am mers la *Palais de la Découverte.* Era o zi de mare sărbătoare.

La începutul anilor 1930, fizicianul francez care a câştigat Premiul Nobel, Jean Perrin, îşi imaginează proiectul unui centru ştiinţific destinat trezirii interesului marelui public pentru descoperirile şi cercetările din toate domeniile stiintei. *Palais de la Découverte* îsi des- *t > >* chide porţile în 1937, la doi paşi de Champs-Élysées, unde se amenajează în acest sens întreaga aripă vestică a marelui palat pe douăzeci şi cinci de mii de metri pătraţi. Expoziţiile, care nu ar fi trebuit să dureze decât şase luni, au cunoscut un asemenea succes încât, începând cu 1938, temporarul se transformă în permanent. La optzeci de ani după deschiderea acestuia, clădirea primeşte în fiecare an multe sute de mii de vizitatori.

Ieşind de la metrou, merg pe şoseaua Franklin-D.- Roosevelt spre intrarea palatului. Ajung la scările de pe peron şi un detaliu îmi

atrage atenţia: 4, 2, 0, 1, 9, 8, 9. Este o stranie procesiune de cifre imprimate, care se ondulează pe sol şi urcă scările, părând că se strecoară până în interiorul clădirii. Iată un lucru neobişnuit! Ultima oară când am trecut pe aici, cifrele acestea nu erau. Urmez calea lor: 1, 3, 0, 0, 1, 9. Intru în palat. Şirul continuă şi aici: 1, 7, 1, 2, 2, 6. Acestea traversează rotonda centrală şi o iau spre scara principală: 7, 6, 6, 9, 1, 4. Urc scările patru câte patru, trec prin faţa intrării de la Planetariu şi o iau la stânga: 5, 0, 2, 4, 4, 5. Cifrele mă conduc drept spre departamentul de matematică. Le văd înfăşurându-se, părăsind solul şi urcând de-a lungul zidului: 5, 1, 8, 7, 0, 7. în sfârşit, iată-le ajunse la punctul lor de plecare. Mă aflu în inima unei mari încăperi circulare, unde cifrele roşii şi negre au crescut, de asemenea, în mărime, aflându-se într-un vârtej care se înalţă din ce în ce mai sus. în sfârşit, privirea îmi este captată de începutul seriei: 3, 1, 4, 1, 5... Mă găsesc în inima unuia dintre locurile emblematice ale palatului. Este vorba despre sala 7t.

Fără nicio îndoială că numărul n este celebru şi cel mai fascinant dintre constantele matematice. Forma circulară a sălii îmi aduce aminte că valoarea lui este strâns legată de geometria cercului; este vorba de numărul prin care trebuie să multiplicăm diametrul unui cerc pentru a-i găsi perimetrul. Litera n (se citeşte pi) este de altfel cea de-a şaisprezecea literă a

alfabetului grecesc, echivalentul „p”-ului din alfabetul latin şi iniţiala cuvântului perimetru. Numărul n nu este foarte mare, abia dacă depăşeşte puţin cifra 3, dar suita sa de zecimale este infinită: 3,14159265358979...

în mod obişnuit, doar primele 704 zecimale ale numărului sunt văzute de vizitatori înfăşurându-se pe pereţii rotunjiţi ai sălii 7t. Dar astăzi, cifrele au părăsit sala, au invadat Parisul şi se etalează până în stradă. Acum vedem mai mult de 1 000 de zecimale. Trebuie să spunem că data este memorabilă; adică 14 martie 2015 este ziua n a secolului.

Prima ediţie a lui „n Day” a avut loc pe 14 martie 1988 la *Exploratorium,* ruda americană a lui *Palais de la Découverte*, aflată în inima oraşului San Francisco. A paisprezecea zi a celei de-a treia luni, adică 3/14 (în notaţia americană luna precede ziua), era o dată bine aleasă pentru a-l celebra pe n, a cărui valoare 3,14 este aproximarea obişnuită, cu două cifre după virgulă. De atunci iniţiativa a căpătat adepţi, iar numeroşi pasionaţi din întreaga lume se întâlnesc în fiecare an pentru a sărbători constanta şi, prin ea, întreaga matematică. Sărbătoarea a ajuns la o atât de mare amploare în 2009, încât „n Day” a fost recunoscută oficial de Camera Reprezentanţilor din Statele Unite.

în acest an, 2015, *aficionados*[1] ai lui *n* au aşteptat ziua cu o şi mai mare nerăbdare. Suntem la data de 3/14/15, adică se adaugă încă două

cifre la coincidenţa datei şi a constantei. Această ediţie trebuie să fie măreaţă! Cu această ocazie, întreaga echipă de matematicieni de la *Palais de la Découverte* se află pe pod. Iată de ce mă aflu şi eu aici: împreună cu alţi câţiva matematicieni, am venit să ne aducem contribuţia la o zi bogată în experienţe matematice.

Dacă numărul n vine pe linie geometrică, el s-a răspândit treptat în cea mai mare parte a ramurilor matematicii. Este un număr care are multiple feţe. în aritmetică, în algebră, în analiză, în probabilităţi, rari sunt matematicienii, oricare ar fi disciplinele acestora, care nu au avut

Fani - în spaniolă. *(N.t.)*

niciodată de-a face cu n. în inima palatului, rotonda freamătă de animaţii care îi prezintă multiplele aspecte. Aici vizitatorii sunt invitati să numere boldurile aruncate în mod aleatoriu pe parchet, dincolo pot observa proporţia numerelor care apar în tabelele de înmulţire. Pe jos, copiii acoperă suprafaţa unui disc cu scândurele din lemn. Un alt grup se ocupă cu studiul traiectoriei unui punct fixat pe o roată care se rostogoleşte pe un plan înclinat. Toţi ajung la acelaşi rezultat: 3,1415...

Puţin mai încolo, un program informatic propune vizitatorilor să caute primele apariţii ale datelor lor de naştere în suita de zecimale de după virgulă. Un tânăr îşi încearcă norocul; este născut la 25 septembrie 1994. Rezultatul nu întârzie să apară, căci secvenţa 25091994 apare în numărul n începând cu cea de-a 12785022-a zecimală.

Matematicienii au emis ipoteza („au conjectural) că toate secvenţele de cifre, oricât de lungi ar fi, apar la un moment dat în zecimalele lui 7t. Simulările informatice par să confirme acest lucru. Până în acest moment, toate secvenţele care au fost căutate s-au regăsit. Totuşi nimeni până acum nu a ştiut să facă o demonstraţie incontestabilă care să probeze că aşa vor sta lucrurile pentru orice situaţie am alege.

Iată că o fetiţă de doisprezece ani se apropie de mine. Pare uimită de instrumentele amuzante care ne înconjoară şi-mi aruncă o privire întrebătoare.

— Te întrebi ce e cu toate astea, nu-i aşa? Ai auzit deja vorbindu-se de numărul n?

— Desigur, exclama ea. Este 3,14. De fapt, nu... este aproape 3,14... Am văzut asta la şcoală. Ajută să calculăm perimetrul unui cerc. Am învăţat şi poezia.

— Poezia?

Ea îşi mijeşte ochii ca şi cum ar căuta prin memorie, apoi începe să recite.

Que y aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages Immortel Archimède, artiste, ingénieur, Qui de ton jugement peut priser la valeur? Pour moi ton problème eut de pareils avantages.[1]

Zâmbesc, ascultând această poezioară pe care am învăţat-o si eu când aveam vârsta ei. O uitasem. Me-

t t

canismul său este foarte ingenios: pentru a reconstitui numărul n, este suficient să aflăm numărul de litere din fiecare cuvânt. *Que = 3; j = 1; aime = 4 şi* aşa mai departe.
Poezia cunoaşte multe variante în diferite limbi. Una
;
dintre versiunile cele mai cunoscute în engleză este o adaptare a unui poem de Edgar Allan Poe şi ne permite să găsim 740 de zecimale.[2]
Ce-mi mai place sa învâţ acest număr util înţelepţilor Nemuritor Arhimede, artist, inginer Cine ar putea, dupâ părerea ta, să-i înţeleagă valoarea? Pentru mine, problema ta a avut un sens.
în româneşte, desigur, nu se mai respectă regula pe care autorul o expune câteva rânduri mai jos. *(N.t)*
Poemul *The Raven (Corbul),* scris de Edgar Allan Poe în 1845, a fost adaptat în 1995 de Michael Keith sub numele de *Near a Raven* pentru a suda constanta matematică. începe astfel: *Poe E. // Near a Raven. // Midnights so dreary, tired and weary. Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore. (N.a.)*

— Bravo! o felicit eu. Cred că nu mi-as fi adus aminte de ea la fel de bine ca tine. Dar ia spune-mi, vorbeai de Arhimede în poezia ta, ştii cine a fost?

Se pare că am pus-o în încurcătură. Fetiţa face o grimasă în timp ce ridică din umeri. Se impune să-i aduc aminte cum stau lucrurile. Desenez un cerc mare, care se decupează într-o mulţime de triunghiuri ce se intersectează. Ne luăm zborul spre Sicilia! în urmă cu două mii trei sute de ani, în cetatea antică a Syracuzei. Aici ne aşteaptă Arhimede.

Cicadele zumzăie sub razele unui soare apăsător. Străzile sunt pline de parfumuri care vin din cele patru zări ale Mediteranei. Măsline, peşti sau struguri se amestecă pe tarabele vânzătorilor. în nordul oraşului, silueta impozantă a vulcanului Etna se vede la orizont. La vest, câmpiile fertile asigură prosperitatea coloniei, în timp ce la est portul dublu se deschide spre mare. Syracuza şi-a făurit renumele şi puterea impunându-se ca unul dintre nodurile maritime cele mai importante ale regiunii. A fost fondată cu cinci secole înainte de către coloniştii greci din Corint. Cetatea este una dintre cele mai înfloritoare din întreaga periferie mediteraneeană.

Aici va lua naştere, în -287, un om ale cărui geniu şi inventivitate vor inaugura un nou stil în matematică: Arhimede are calibrul marilor inventatori, al celor care rezolvă probleme, al celor capabili de idei cu adevărat noi şi revoluţionare. Lui i se datorează principiul pârghiei şi cel al şurubului. El este cel care, conform legendei, a strigat *Evrika!* atunci când era în baie, în momentul în care i-a venit în minte principiul fizic care îi poartă astăzi numele: *Orice corp scufundat într-un lichid este împins în sus de o forţă având o intensitate egală cu cea a greutăţii lichidului dislocat* Aşa se explică faptul că obiectele mai uşoare decât apa plutesc, iar cele mai grele se scufundă. Se mai povesteşte şi că, într-o zi în care Syracuza era asaltată de flota

romană, Arhimede a inventat un sistem de oglinzi care au concentrat razele soarelui în aşa fel încât navele duşmanilor au luat foc.

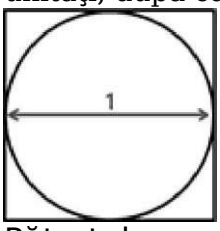
în matematică, lui Arhimede i se datorează primele mari descoperiri în legătură cu numărul **7t**. înaintea lui, şi alţii s-au interesat de cerc, dar adesea acestora le lipsea rigoarea. Aduceţi-vă aminte de cele *Nouă capitole* chinezeşti: se trasau câmpuri circulare cu 10 bu diametru şi o circumferinţă de 30 bu. De fapt, asemenea date spuneau că numărul n este egal cu 3. în papirusul lui Ahmes, rezolvarea aproximativă a cvadraturii cercului lua în considerare valoarea lui n ca fiind 3,16.

în ceea ce-l priveşte pe Arhimede, acesta înţelege că e greu, chiar imposibil să calculăm o valoare exactă a lui 7t. Şi el se va mulţumi cu aproximări ale lui, dar abordarea sa se distinge prin două aspecte: în primul rând, prin faptul că, acolo unde predecesorii lui gândeau că deţineau o metodă exactă, savantul sicilian era conştient că nu putem avea decât valori apropiate; în al doilea rând, el va face o estimare a diferenţelor dintre aproximaţii şi adevărata valoare a lui **7t**, după care va dezvolta metode care să permită reducerea din ce în ce mai mult a acestei diferente.în urma calculelor, el ajunge la concluzia că valoarea pe care o caută se află între două numere care, aşa cum sunt scrise în sistemul nostru zecimal actual, sunt în jur de

3,1408 şi 3,1428. Pe scurt, Arhimede va cunoaşte de acum încolo numărul n, cu o eroare de 0,03%.

Metoda lui Arhimede

Pentru a calcula încadrarea lui n, Arhimede a aproximat cercul prin poligoane regulate. Să luăm, de exemplu, un cerc al cărui diametru măsoară o unitate, iar perimetrul măsoară n unităţi, după care să-l încadrăm într-un pătrat.

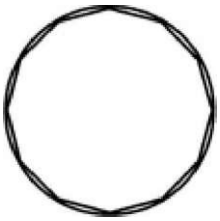


Pătratul are o latură egală cu 1 (precum diametrul cercului) şi deci un perimetru egal cu 4. Cum perimetrul cercului este mai mic decât acela al pătratului, deducem că n este mai mic decât 4. Dacă, din contră, înscrieţi un hexagon în cerc, aşa cum vedem mai jos

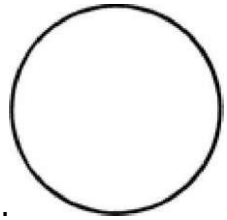
,hexagonul este compus din şase triunghiuri echilaterale ale căror laturi măsoară 0,5 unităţi (jumătate din diametrul cercului). Perimetrul hexagonului măsoară deci 6 x 0,5 = 3. Ajungem la concluzia că n este mai mare decât 3.

Bun! Până aici nimic nu-i palpitant, încadrarea între 3 şi 4 rămâne foarte imprecisă. Pentru a restrânge intervalul, este nevoie acum să mărim numărul de laturi ale poligonului. Dacă divizăm fiecare latură a hexagonului în două, obţinem o

figură cu 12 laturi, care se apropie şi mai mult de cerc.



După câteva calcule geometrice plictisitoare (în principal bazându-ne pe teorema lui Pitagora), ajungem la concluzia că perimetrul dodecagonului măsoară în jur de 3,11. Numărul n este, aşadar, mai mare decât această valoare. Pentru a obţine o încadrare cu o aproximaţie de 0,001, Arhimede a repetat această operaţie de trei ori. Divizând fiecare dintre laturi în două, s-au obţinut 24, apoi 48 şi, în final, s-a ajuns la un poligon cu 96 de laturi



.

Mai vedeţi poligonul? Normal că nu, laturile se lipesc acum atât de bine de cerc, încât este aproape imposibil să-l deosebim cu ochiul liber. Iată cum a ajuns Arhimede la concluzia ca n este mai mare decât 3,1408! Şi refăcând acest proces cu poligoane exterioare cercului, a obţinut n mai

mic de 3,1428. Ceea ce dă rigoare metodei lui Arhimede nu constă numai în rezultatul său, ci şi în faptul că acesta se prelungeşte. Ar fi nevoie să continuăm să subdivi- zăm poligoanele pentru a rafina din ce în ce mai mult încadrarea noastră. în teorie este, aşadar, posibil să obţinem o aproximaţie a numărului n oricât de precisă am dori-o, totul depinde de curajul pe care îl avem pentru a ne lansa în calcule.

în anul -212, trupele romane reuşesc în cele din urmă să intre în Syracuza, iar generalul Marcus Claudius Marcellus care a condus asediul oraşului ordonă solda- ţilor săi să-l salveze pe Arhimede, care avea la vremea aceea 75 de ani. în timp ce oraşul era pe cale să fie cucerit, savantul grec era absorbit de studiul unei probleme de geometrie şi nu-şi dădea seama de nimic din ce se întâmpla în jurul său. Când un soldat roman trece pe lângă Arhimede care desena figuri pe pământ, el îi spune distrat: „Nu-mi deranja cercurile!” Soldatul, jignit, îşi înfige sabia în el, omorându-l.

Generalul Marcellus i-a făcut un mormânt măreţ, având pe soclu o sferă înscrisă într-un cilindru, drept simbol pentru una dintre cele mai remarcabile teoreme ale sale. Niciodată, de-a lungul celor şapte secole care vor urma, Imperiul Roman nu va mai da naştere vreunui matematician de talia lui Arhimede.

în ceea ce priveşte matematica, Antichitatea se va stinge încet. Imperiul Roman se va extinde

în curând în jurul bazinului mediteraneean, iar identitatea greacă se va dizolva în această nouă cultură. Totuşi un oraş va continua să ţină în viaţă pentru alte câteva secole spiritul matematicienilor greci: Alexandria.

în cursul cuceririlor sale, Alexandru cel Mare a pus stăpânire pe Egipt la sfârşitul anului -332. Rămâne aici doar câteva luni, adică timpul necesar pentru a se proclama Faraon al Memphisului şi pentru a decide în legătură cu fondarea unui nou oraş pe coasta mediteraneeană. Alexandru nu va vedea niciodată oraşul căruia i-a dat numele său. După ce a murit, opt ani mai târziu, în Babilon, regatul său a fost împărţit între generalii lui, iar Egiptul i-a revenit lui Ptolemeu I, care va face din Alexandria capitala sa. Sub domnia lui, oraşul Alexandria va deveni una dintre cetăţile cele mai înfloritoare din întregul bazin mediteraneean.

Ptolemeu va continua marile lucrări iniţiate de Alexandru. în vârful insulei Pharos, care se află în fata
[1] *t*
oraşului, el începe construcţia unui far monumental.
Nu trebuie să treacă mult timp pentru ca autorii greci să recunoască în Farul din Alexandria un monument cu adevărat excepţional şi să facă din el cel de-al şaptelea şi ultimul element din lista foarte scurtă a Minunilor Lumii.

Să ne oprim câteva momente pentru a profita de panorama extraordinară care se deschide în faţa ochilor călătorului care a avut curajul să urce sutele de trepte ale scării spiralate ce duce spre vârful farului. Priviţi spre nord! Marea Mediterană se întinde până la orizont. De aici puteţi vedea vasele comerciale care sosesc şi pot fi observate de la mai mult de cincizeci de kilometri. Iată unul care trece prin faţa dumneavoastră şi intră în port cu cala plină de mărfuri. Poate că vine de la Atena, de la Syracuza sau chiar de la Massalia, această cetate dinamică din sudul Galiei, pe care o vom numi într-o zi Marsilia. Dacă vă întoarceţi privirea spre sud, veţi vedea Delta Nilului. La cinci kilometri de aici veţi observa o întindere de apă sărată care traversează delta. Este vorba despre lacul Mareotis. între lac şi mare, pe această bandă largă de pământ, Alexandria îşi etalează splendorile. Este un oraş nou şi modern. Ici, colo puteţi să mai vedeţi câteva şantiere în lucru.

Pe insula Pharos farul nu este singurul care captează atenţia. Aici se mai găseşte şi templul lui Isis. Pentru a ajunge la el, alexandrinii trebuie să meargă pe heptasta- dium, un dig lung de 1 300 de metri care separă portul în două bazine independente. Din înaltul farului puteţi să vedeţi siluetele minuscule ale trecătorilor care se plimbă.

Cei care revin spre continent ajung în cartierul regal, unde se găsesc palatul lui Ptolemeu,

teatrul şi templul lui Poseidon. Puţin mai spre vest, o clădire impunătoare atrage în mod deosebit atenţia: Mouseion. Spre acest loc ne îndreptăm în prezent.

Cu acest mare muzeu, destinat să păstreze moştenirea culturii greceşti, Ptolemeu vrea să facă din Alexandria un mare centru cultural, capabil să rivalizeze cu Atena. Aşadar, nu se va zgârci în a investi în acest sens. Oamenii de stiintă care stau la Mouseion sunt răsfăţaţi: sunt ca-

; ; ; /

zaţi, hrăniţi şi plătiţi pentru a-şi continua cercetările. Regele pune la dispoziţia acestora şi o bibliotecă imensă, legendara Bibliotecă a Alexandriei! Poate că mai mult decât oamenii de ştiinţă care s-au perindat pe aici, această bibliotecă va contribui la renumele şi prestigiul Mouseionului.

Pentru a umple biblioteca, strategia lui Ptolemeu este simplă: toate vasele care fac escală la Alexandria trebuie să predea cărţile pe care le transportă. Apoi cărţile sunt copiate, iar copia este redată vasului. în ceea ce priveşte originalul, acesta merge direct în colecţiile bibliotecii. Mai târziu, Ptolemeu al II-lea, fiul şi succesorul primului, va lansa un apel tuturor regilor lumii, ca aceştia să-i trimită volume faimoase din ţările lor. La deschidere, Biblioteca din Alexandria număra aproape 400 000 de

volume. în viitor va reuşi să strângă până la 700 000 de exemplare.

Planul lui Ptolemeu va funcţiona de minune si, de-a lungul a mai mult de şapte secole, savanţii se vor perinda prin Alexandria, unde mediul intelectual îşi va păstra vitalitatea care lipsea în restul lumii mediteraneene.

Printre celebrii rezidenţi ai Mouseionului s-a aflat si Eratostene din Cyrene, care a fost, dacă vă mai aduceţi aminte, primul care a măsurat cu precizie circumferinţa Pământului. Tot aici Euclid şi-ar fi redactat cea mai mare parte din opera sa *Elemente de matematică*. Un anume Diophante va scrie aici o lucrare vestită despre ecuaţiile care vor căpăta mai târziu numele său. în secolul al II-lea al erei noastre, tot în Alexandria, Claudius Ptolemeu (care nu are nimic în comun cu primul) va redacta *Almageste,* o lucrare adunând un număr mare dintre cunostintele de matematică şi astronomie care circulau în epoca sa. Cu toate că Ptolemeu spune în această carte că Soarele se învârteşte în jurul Pământului, *Almageste* va rămâne o operă de referinţă până în momentul în care Copernic îşi va aduce contribuţia în secolul al XVI-lea.

Dar Alexandria nu are numai oameni de stiintă care

scriu şi produc noi cunoştinţe. Aici există o întreagă comunitate de copişti, traducători, comentatori de lucrări şi editori, care s-a format în jurul Mouseionului. Oraşul freamătă datorită acestora.

Dar iată că în secolul al IV-lea vremurile se tulbură. La 16 iunie 391, era noastră, împăratul Teodosie I, dorind să accelereze convertirea imperiului la religia creştină, publică un edict care interzice toate cultele păgâne. Mouseion, cu toate că nu este în adevăratul sens al cuvântului un templu, este afectat de decizia împăratului şi închis împreună cu toate celelalte.

în această epocă, una dintre figurile mediului intelectual al Alexandriei este Hypatia. Tatăl ei, Theon, era directorul Mouseionului în momentul în care a fost închis, lucru care nu i-a împiedicat totuşi pe oamenii
de stiintă ai oraşului să-si continue redactarea lucrări-
lor pentru încă puţin timp. Socrate Scolasticul va scrie mai târziu că nenumărate persoane se alăturau mulţimii pentru a o asculta vorbind pe Hypatia, care îi depăşea prin ştiinţa sa pe toţi oamenii timpului său. Hypatia este matematician şi filosof. Ea este totodată şi prima femeie din istoria matematicii.

Prima? Nu prea. Şi alte femei au făcut matematică înaintea Hypatiei, fără ca operele sau biografia acestora să fi ajuns până la noi. în

şcoala lui Pitagora femeile erau admise. Numele multora dintre ele, precum Theano, Autocharidas sau Habroteleia, ne sunt cunoscute astăzi, dar trebuie să recunoaştem că nu ştim aproape nimic despre ele.

Niciun text scris de Hypatia nu ne-a parvenit, dar mai multe surse menţionează lucrările sale. Ea se va interesa în special de aritmetică, geometrie şi astronomie. Va adăuga lucruri noi în mod deosebit la operele începute câteva secole mai devreme de Diophante şi Ptolemeu. Hypatia este şi o inventatoare prolifică. Ei îi datorăm inventarea hidrometrului — care ne permite să măsurăm densitatea unui fluid profitând în mod inteligent de principiul lui Arhimede —, precum şi a unui nou model de astrolab care facilitează măsurătorile astronomice.

Din păcate, povestea sa se va sfârşi repede. în 415 ea va fi tinta mâniei creştinilor din oras, care o urmăresc si o omoară. Corpul său este tăiat în bucăţi şi apoi ars.

După închiderea Mouseionului şi moartea Hypatiei, flacăra ştiinţifică a Alexandriei se va stinge foarte repede.
Nici colecţiile bibliotecii nu vor scăpa: vor exista incendii, revolte, valuri de maree şi cutremure

care vor scutura oraşul şi, cu toate că nu ştim cu precizie când şi cum a dispărut Biblioteca din Alexandria, ştim sigur că în secolul al VH-lea nu va mai exista nimic din ea.

O epocă se încheie. Totuşi, istoria are căi ocolitoare şi matematicienii greci îşi vor găsi în curând cărări pentru a ajunge până la noi

8

.Nimic şi mai puţin decât nimic

Din înaltul celor 6 714 metri cât măsoară în altitudine, muntele Kailash din Tibet face parte din cercul restrâns de vârfuri care nu au fost niciodată atinse de piciorul lui *Homo sapiens.* Silueta sa rotunjită, brăzdată de zăpadă pe fondul gri al granitului, se detaşează masiv deasupra peisajului decupat al vestului himalayan. Pentru locuitorii din regiune, fie ei hinduşi sau budişti, muntele este sacru şi poartă cu sine o mulţime de mituri ancestrale şi poveşti minunate. Se spune chiar că ar fi vorba despre legendarul munte Meru, despre care mitologiile locale pretind că reprezintă centrul Universului.

Aici se ascunde izvorul unuia dintre cele şapte râuri sacre ale regiunii: Indusul.

Ieşind de pe pantele muntelui Kailash, Indusul ia direcţia estică, îşi sapă rapid în zigzag o cale care străbate munţii Caşmirului, apoi începe să coboare lent spre sud. Aici traversează câmpiile Pendjabului şi Sindului din actualul Pakistan, înainte de a se vărsa, printr-o deltă, în Marea Arabiei. Valea Indusului este fertilă. în Antichitate, regiunea era acoperită de foşnetul şi bogăţia pădurilor. Elefanţii Asiei stau alături de rinoceri, tigri de Bengal, maimuţe de toate felurile şi şerpi ce vor încerca în curând să-si farmece îmblânzitorii care le cântă din fluier. Aproape că ne-am aştepta să-l întâlnim, la o cotitură de cărare, pe Mowgli, băieţelul ieşit din

Cartea Junglei, ale cărui aventuri umplu aceste decoruri. Aici va lua naştere o civilizaţie originală şi rezervată, în care matematicienii vor juca un rol determinant la începutul Evului Mediu.

încă din mileniul al III-lea înaintea erei noastre, se dezvoltă câteva oraşe importante în jurul fluviului, precum Mohenjo-Daro sau Harappa. Văzute de departe, aceste cetăţi construite din cărămizi de argilă seamănă întru câtva cu contemporanele lor din Mesopotamia. în al II-lea mileniu începe epoca vedică. Regiunea este împărţită într-o multitudine de mici regate care se înmulţesc până pe malurile Gangelui. Hinduismul se naşte, se dezvoltă şi apar primele mari texte în sanscrită. în secolul al IV-lea înaintea erei noastre, Alexandru cel Mare ajunge până pe malurile Indusului şi fondează două oraşe care vor căpăta numele de Alexandria, fără ca acestea să cunoască totuşi destinul extraordinar al fratelui lor egiptean. O parte din cultura grecească se integrează în India. Urmează epoca marilor imperii. Maurya domnesc pe aproape toată întinderea subcontinentului indian timp de mai mult de un secol. După Maurya, o mulţime de dinastii se vor succede şi vor coexista mai mult sau mai puţin paşnic până la cucerirea musulmană din secolul al VUI-lea.

De-a lungul secolelor, indienii fac o matematică despre care, din păcate, nu ştim mare lucru. Cauza acestei necunoaşteri este simplă: oamenii lor de ştiinţă au dezvoltat încă de

la începuturile epocii vedice un ideal de transmitere orală a cunoştinţelor care respinge în principiu punerea lor în scris. Cunoştinţele trebuie să fie asimilate prin viu grai, din generaţie în generaţie, de la maestru la discipol. Textele sunt învăţate pe de rost, sub formă de poeme sau însoţite de artificii mnemotehnice, apoi recitate şi repetate de câte ori este nevoie până la a fi perfect stăpânite. Găsim când şi când câteva excepţii de la regulă, adică fragmente scrise care ne-au parvenit, deşi recolta este foarte slabă.

Cu toate acestea, ei fac matematică! Cum am putea altfel să explicăm bogăţia de concepte pe care ne-o vor oferi începând cu secolul al V-lea, când ei decid, în sfârşit, să pună în scris cunoştinţele acumulate oral de-a lungul secolelor? India va cunoaşte de acum încolo o epocă de aur a ştiinţei care în curând se va răspândi în întreaga lume.

Oamenii de ştiinţă indieni încep să scrie lungi tratate, preluând cunoştinţele ancestrale pe care le completează cu propriile descoperiri. Printre cei mai cunoscuţi se numără Aryabhata, care se va interesa de astronomie şi va calcula destul de precis numărul 7t, Varahamihira, care a adăugat noi descoperiri în trigonometrie, sau Bh skara, primul care l-a scris pe zero sub forma unui cerc şi a utilizat în mod stiintific sistemul zecimal de care ne servim / /

până în ziua de azi. Ei bine, cele zece cifre ale noastre — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9 —, pe care le numim de obicei cifre arabe, sunt în realitate indiene!

Totuşi, dacă dintre toţi savanţii indieni din această epocă ar trebui să alegem unul singur, atunci fără îndoială că istoria l-ar alege pe Brahmagupta. Acesta a trăit în secolul al VH-lea si a fost directorul Observatorului
/
din Ujjain. în această epocă, oraşul Ujjain, situat pe malul drept al râului Shipra, în centrul Indiei actuale,
este unul dintre cele mai mari centre stiintifice ale tării.
/ / ;
Observatorul său astronomic şi-a câştigat reputaţia, iar oraşul îi era deja cunoscut lui Claudius Ptolemeu în perioada de glorie a Alexandriei.

în 628, Brahamagupta publică opera sa majoră - *Br hmasphu asiddh nta.* în acest text se află prima descriere completă a lui zero şi a numerelor negative, însoţită de proprietăţile lor aritmetice.

în zilele noastre, zero şi numerele negative au devenit atât de omniprezente în viaţa cotidiană — pentru măsurarea temperaturii, altitudinea în raport cu nivelul mării sau soldul contului nostru din bancă —, încât am ajuns aproape să uităm cât de geniale sunt aceste idei.

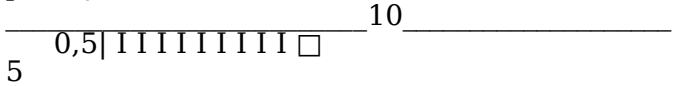
Inventarea lor a fost un exerciţiu de acrobaţie cerebrală
/;
rar întâlnit, iar oamenii de ştiinţă indieni au fost primii care l-au dus la perfecţiune. A înţelege acest proces în tot ceea ce are el mai subtil şi puternic reprezintă un deliciu intelectual asupra căruia trebuie să ne oprim puţin, dacă dorim să pătrundem adânc în răsturnările pe care le va cunoaşte matematica în secolele ce vor urma.

Una dintre întrebările care mi se pun adesea atunci când îmi exprim în public preferinţele pentru matematică este cea cu privire la originea acestei pasiuni. *Cum de aveţi această preferinţă care este cel puţin bizară?* sunt întrebat câteodată. Există vreun profesor anume care v-a stârnit pasiunea pentru matematică? Vă plăcea de când eraţi copil? Modul în care a fost declanşată o asemenea vocaţie îi face curioşi pe cei care până la momentul respectiv rămăseseră închişi faţă de această disciplină.

Ca să fiu sincer, trebuie să mărturisesc că habar nu am. După câte îmi aduc aminte, mi-a plăcut matematica dintotdeauna, fără să pot identifica un anume eveniment petrecut în viaţa mea care m-ar fi condus pe calea aceasta. Totuşi, dacă răscolesc mai atent în memorie, îmi revin unele amintiri cu privire la bucuria intensă care mă cuprindea când noi idei îmi apăreau dintr-odată în minte. Aşa a fost cazul când am descoperit o proprietate uimitoare a înmulţirii.

Cred că aveam nouă sau zece ani când, tastând la întâmplare pe calculatorul meu de elev, am descoperit un rezultat straniu: 10 x 0,5 = 5. înmulţiţi numărul 10 cu 0,5 şi veţi obţine 5! Ia uite ce îndrăznea să pretindă calculatorul meu în care până atunci avusesem o încredere oarbă! Cum este posibil ca înmulţind un număr cu ceva să putem obţine un altul care este mai mic decât acesta? O înmulţire nu presupune să creştem cantitatea căreia i se aplică? Nu acesta este sensul cuvântului „a înmulţi”? Calculatorul meu drag n-ar fi făcut mai bine să-mi afişeze un număr mai mare decât 10?

Mi-a trebuit un timp, chiar mai multe săptămâni, în care m-am gândit adesea la acest rezultat înainte de a reuşi să-mi clarific gândurile. Declicul final a venit în ziua în care m-am gândit să-mi reprezint înmulţirea în- tr-o manieră geometrică, mergând astfel, fără să ştiu, pe urmele gânditorilor antici. Luaţi un dreptunghi a cărui lungime măsoară 10 unităţi, iar lăţimea 0,5. Suprafaţa sa ne va indica 5 pătrăţele cu latura de 1.



Cu alte cuvinte, a înmulţi ceva cu 0,5 înseamnă să împărţi la 2. Şi acelaşi principiu se aplică şi cu alte numere. Să înmulţim ceva cu 0,25 înseamnă să împărţim la 4; să înmulţim cu

0,1 înseamnă să împărţim la 10 şi aşa mai departe.

Explicaţia este convingătoare, dar concluzia are ceva în ea care ne derutează: cuvântul „înmulţire” nu înseamnă exact acelaşi lucru atunci când îl aplicăm în matematică sau în limbajul cotidian. Desigur că în viaţa de toate zilele nu putem pretinde că am înmulţit suprafaţa grădinii noastre după ce am vândut jumătate din ea. Cine ar spune, oare, că veniturile sale s-au multiplicat după ce a pierdut 50% din ele? Procedând astfel, înmulţirea pâinilor devine un miracol pe care oricine îl poate realiza: mâncaţi jumătate din ele şi magia s-a produs.

Aceste reflecţii ne gâdilă spiritul atunci când le descoperim pentru prima oară. Au în ele ceva delicios, care ne deranjează şi ne sună în minte precum un joc de cuvinte foarte reuşit. în tot cazul, ăsta era efectul pe care îl produceau aceste descoperiri curioase asupra copilului care eram. Această stranietate mi-a apărut cu atât mai clară atunci când, cu mulţi ani mai târziu, am citit un text al matematicianului Henri Poincare, *Stiintă si metodă,* apărut în 1908, unde am găsit următoarea propoziţie: „Matematica este arta de a da acelaşi nume unor lucruri diferite”.

Ca să fiu cinstit, trebuie să recunosc că această propoziţie poate să se aplice fără îndoială oricărui alt limbaj. Cuvântul „fruct” desemnează lucruri atât de diferite precum merele, cireşele

sau tomatele. Fiecare dintre aceste cuvinte regrupează la rândul său o multitudine de varietăţi diferite care ele însele vor genera cele mai subtile categorii în momentul în care ne lansăm într-o analiză
botanică suficient de minuţioasă. Totuşi Poincare subli-
niază pe bună dreptate că niciun alt limbaj în afară de cel matematic nu merge atât de departe în acest proces de regrupare. Matematica ne permite apropieri pe care niciun alt limbaj nu le aprobă. Pentru matematicieni,
înmulţirea si împărţirea nu sunt altceva decât una si
aceeaşi operaţie. A înmulţi ceva cu un număr înseamnă să divizezi printr-un altul. Totul depinde de punctul de vedere pe care îl adoptăm.

Inventarea lui zero şi a numerelor negative se produce prin acelaşi mod de gândire. Pentru a le crea, trebuie să îndrăznim să gândim contra propriei limbi, adică trebuie să regrupăm în sânul aceleiaşi idei concepte pe care limbajul le tratează ca fiind complet diferite. Oamenii de ştiinţă indieni au fost primii care s-au angajat în mod clar pe această cale.

Dacă vă spun că deja am păşit de câteva ori pe planeta Marte sau că m-am întâlnit de câteva ori cu Brahmagupta în persoană, m-aţi crede? Probabil că nu. Şi aţi avea dreptate, căci în cadrul limbii noastre frazele semnifică faptul că

am mers efectiv pe Marte şi că m-am întâlnit în realitate cu Brahmagupta. Cu toate acestea, în matematică, este suficient să ne imaginăm că aceste numere au valoarea zero pentru a înţelege că nu am minţit deloc. Limba foloseşte structuri diferite, după cum un lucru este sau nu este. Afirmaţie: „Am mers pe Marte”; negaţie: „Nu am mers pe Marte”. Matematica va şterge aceste diferenţe pentru a le regrupa într-una şi aceeaşi formulă. „Am mers de câteva ori pe Marte.” Acest număr („câteva ori”) poate fi zero.

în timp ce, cu câteva secole în urmă, grecilor le era greu să-l accepte pe 1 ca fiind un număr, imaginaţi-vă revoluţia pe care a reprezentat-o atribuirea numelui de „număr” unei absenţe! înaintea indienilor, câteva popoare au declanşat acest tip de gândire, dar niciunul nu a ştiut cum să o ducă până la capăt. începând cu al IlI-lea secol înaintea erei noastre, mesopotamienii au fost primii care au inventat cifra zero. înainte, sistemul lor de numerotare scria în acelaşi fel pe 25 şi pe 250. Cu ajutorul cifrei 0, care desemnează un loc gol, posibilele confuzii au dispărut. Totuşi, niciodată babilonienii nu vor acorda acestui 0 statutul de număr, adică să poată fi scris singur pentru a desemna o absenţă completă de obiecte.

La celălalt capăt al lumii, mayaşii au inventat şi ei un zero. De fapt, au inventat chiar doi! Primul, precum cel al babilonienilor, era folosit pentru a marca un loc gol în sistemul lor

poziţional în baza douăzeci. în schimb, al doilea poate fi foarte bine considerat un număr, dar nu era folosit decât în contextul calendarului acestora.
Fiecare lună din calendarul mayaş avea douăzeci de zile, numerotate de la 0 la 19. Acest zero este utilizat singur, totuşi utilizarea lui nu este de tip matematic, căci mayaşii nu se serveau niciodată de el pentru a efectua operaţii aritmetice.

Pe scurt, Brahmagupta este primul care l-a descris întru totul pe zero ca număr, însoţit de o descriere a proprietăţilor sale. Scăzând un număr oarecare din el însuşi, se obţine zero; adăugând sau sustrăgând pe zero dintr-un număr, numărul rămâne neschimbat. Aceste proprietăţi aritmetice ne par evidente, dar faptul că ele au fost atât de clar enunţate de Br hmagupta ne demonstrează că zero este definitiv integrat ca număr şi are un statut asemănător tuturor celorlalte.

Zero deschide poarta spre numerele negative. Totuşi va fi nevoie de mult timp până când matematicienii le vor accepta în mod definitiv.

Savanţii chinezi sunt primii care au descris cantităţi ce ar putea fi asimilate numerelor negative. Liu Hui, în comentariile sale la cele *Nouă capitole*, descrie un sistem de beţişoare colorate care permit să ne reprezentăm cantităţile pozitive sau negative. Un beţişor roşu reprezintă un număr pozitiv, un beţişor negru,

unul negativ. Liu Hui explică în detaliu cum interacţionează unele cu celelalte aceste specii de numere si mai ales cum se adună sau se scad.

Descrierea este deja foarte amănunţită, rămânându-i totuşi un singur pas de făcut: acela de a considera pozitivele şi negativele nu ca fiind două grupuri distincte care pot să interacţioneze, ci ca unul şi acelaşi ansamblu. Cu siguranţă că numerele pozitive şi negative nu au întotdeauna aceleaşi proprietăţi atunci când vine vorba să facem calcule cu ele, dar, înainte de toate, au multe puncte comune care ne permit să le socotim asemănătoare. Situaţia poate fi comparată cu cea a numerelor pare şi impare care formează două clanuri distincte, având proprietăţi aritmetice diferite, dar care aparţin totuşi aceleiaşi mari familii a numerelor. /

Această reunificare, ca şi în cazul lui zero, a fost realizată pentru prima oară tot de oamenii de ştiinţă indieni. Şi tot Brahmagupta este cel care va alcătui un studiu complet al acestor numere în *Br hmasphu asiddh nta.* Mergând pe urmele lui Liu Hui, el realizează o listă completă cu regulile la care sunt supuse operaţiile cu aceste noi numere. Ne arată, printre altele, că suma a două numere negative este tot un număr negativ, de exemplu (-3) + (-5) = -8, că produsul unui număr pozitiv şi al unui număr negativ este tot negativ, (-3) x 8 = -24 sau că produsul a două numere negative este pozitiv (-3) x (-8) = 24. Acest ultim

punct poate să pară contraintuitiv şi va fi unul dintre lucrurile cel mai dificil de acceptat. Chiar şi astăzi reprezintă o capcană binecunoscută de care se tem elevii din toată lumea.

De ce minus înmulţit cu minus face plus?

în secolele care au urmat după ce Brahmagupta le-a enunţat, regulile de înmulţire ale semnelor şi în mod special „- x - = +” nu vor înceta să provoace reţineri şi multiple întrebări.
Aceste întrebări vor depăşi cu mult lumea matematicienilor şi vor genera multiple neînţelegeri imediat ce vor fi introduse în şcoli. în secolul al XlX-lea, însuşi scriitorul francez Stendhal îşi va exprima neînţelegerea lor în romanul autobiografic *Viaţa lui Henry Brulard.* Autorul lui *Roşu şi Negru* şi al *Mănăstirii din Parma* scria următoarele rânduri:
După mine, ipocrizia era imposibilă în matematică şi, în simplitatea mea tinerească, credeam ca aşa stau lucrurile în toate ştiinţele despre care auzisem spunându-se că matematica are aplicabilitate. Ce puteam să mă fac eu când mi-am dat seama că nimeni nu putea să-mi explice de ce minus ori minus face plus (- x - = +)? (Aceasta este una dintre bazele fundamentale ale ştiinţei pe care o numim algebră.)
Ba şi mai rău, această dificultate (care fără îndoială este explicabilă, căci conduce totuşi la adevăr) îmi era explicată prin raţiuni extrem de

neclare chiar şi pentru cei care mi le prezentau [...] Am fost redus la ceea ce mi se spune şi astăzi: trebuie să fie adevărat ca minus înmulţit cu minus să dea plus, deoarece, în mod evident, folosind de fiecare dată această regulă în calcule, ajungem la rezultate adevărate şi indubitabile.
Regula de înmulţire a semnelor, care este cu siguranţă destul de stranie la prima vedere, îşi capătă totuşi sensul dacă o gândim în sistemul de beţi- şoare imaginate de oamenii de ştiinţă chinezi. Să utilizăm, de exemplu, acest sistem pentru a reprezenta câştiguri sau pierderi monetare. Să ne imaginăm că un beţişor negru reprezintă 5 €, în timp ce un beţişor gri reprezintă o datorie de 5 €, adică -5 €. Astfel, dacă aveţi zece beţisoare negre şi cinci beţişoare gri, soldul se ridică la 25 €.

10*5€ = 50€ 5x(-5€) = -2S€
Să cercetăm acum diferitele cazuri de figuri care pot fi reprezentate atunci când contul dumneavoastră variază. Imaginaţi-vă că vi se dau 4 beţişoare negre suplimentare; soldul dumneavoastră creşte în cazul acesta cu 20 €. Altfel spus, 4 x 5 = 20. Produsul a două numere pozitive este pozitiv. Până aici totul este clar. Dacă acum vi se dau 4 beţişoare gri, adică 4 datorii, soldul dumneavoastră se micşorează cu

20 €, altfel spus, 4 x (-5) = -20. Un pozitiv înmulţit cu un negativ rezultă un negativ. în acelaşi fel, dacă vi se iau 4 beţişoare negre veţi pierde tot 20 €. Asta înseamnă că (-4) x 5 = -20. Aceste ultime două situaţii ne arată foarte bine că a da datorii cuiva are acelaşi efect cu a-i lua bani. Adăugând negativul înseamnă să sustragi din pozitiv.
Iată-ne acum ajunşi în punctul crucial. Ce se va întâmpla cu soldul dumneavoastră dacă vi s-ar luapatru beţisoare gri? Cu alte cuvinte, ce se întâmplă când vi se iau datoriile? Răspunsul este clar: soldul dumneavoastră creşte; veţi câştiga bani. Ceea ce poate fi reprezentat ca (-4) x (-5) = 20. A lua negativul înseamnă să adaugi pozitivul. Minus înmulţit cu minus este egal cu plus.

Apariţia numerelor negative va bulversa şi sensul adunării şi scăderii. Problema este complet asemănătoare cu cea a înmulţirii cu 0,5 care reprezintă o împărţire la 2. Deoarece a aduna un număr negativ înseamnă să sustragem un număr pozitiv, aceste două operaţii îşi pierd sensul pe care le au în limbajul obişnuit. în mod curent, a aduna este sinonim cu a creşte. Totuşi, dacă adun numărul -3, asta înseamnă că scad 3: de exemplu, 20 + (-3) = 17, iar dacă sustrag (-3), asta înseamnă că adaug 3; 20 - (-3) = 23. Iată că din nou suntem pe cale să dăm acelaşi nume unor lucruri diferite. Datorită nume- relor negative, adunarea şi scăderea devin cele două feţe ale unei singure şi aceleiaşi operaţii.

Această confuzie de cuvinte şi impresia de paradox, precum „minus x minus = plus”, vor încetini în mod considerabil acceptarea numerelor negative. Mult timp după Brahmagupta, numeroşi oameni de ştiinţă vor continua să ignore aceste numere teribil de practice, dar atât de greu de priceput. Unii le vor numi chiar „numere absurde” si nu se vor resemna să le utilizeze în calculele lor / intermediare decât cu condiţia ca ele să nu mai apară în rezultatul final. Va trebui să aşteptăm secolul al XlX-lea, şi chiar XX, pentru ca legitimitatea lor să fie pe deplin acceptată, iar utilizarea lor pe deplin adoptată.

în 711, două mii de cavaleri cu cămilele lor vor veni dinspre Occident să debarce în valea Indusului. Aceste trupe sunt ale lui Muhamad Ibn-Qasim, tânărul comandant arab în vârstă de doar douăzeci de ani. Mai bine echipaţi şi pregătiţi, soldaţii săi vor spulbera armata de cincizeci de mii de oameni a lui *raja* (regele) Dahir şi vor pune stăpânire pe regiunea Sindului şi a deltei fluviului. Pentru populaţiile locale, evenimentul este tragic, căci mii de soldaţi sunt decapitaţi, iar regiunea este prădată complet.

Totuşi, apariţia tânărului Imperiu Arabo-Musulman la porţile Indusului va oferi o şansă pentru difuzarea matematicii indiene. Savanţii arabi vor integra foarte repede descoperirile în lucrările lor şi le vor da o sonoritate mondială al căror ecou se aude încă si în matematica

secolului XXI

8

.Puterea triunghiurilor

în 762, iată-ne înapoi în Mesopotamia, acolo de unde a început totul. în timp ce Babilonul nu mai este decât un câmp de ruine, lucrări ameţitoare se desfăşoară la o sută de kilometri mai spre nord. Aici, pe malul drept al Tigrului, califul Abassid Al-Mansur s-a decis să-şi aşeze noua capitală.

Imperiul Arabo-Musulman tocmai cunoaşte un secol de expansiune meteorică. O sută treizeci de ani mai devreme, în 632, când Brahmagupta avea treizeci şi patru de ani şi tocmai termina redactarea *Br hmasphu asiddh nta,* Mahomed murea la Medina. După el, califatele care se succed vor face cuceriri în lanţ şi vor propaga islamul din sudul Spaniei până pe malurile Indusului, trecând prin Africa de Nord, Persia şi Mesopotamia.

Al-Mansur domneşte asupra unui califat de peste zece milioane de kilometri pătraţi. Transpus în zilele noastre, acest teritoriu s-ar plasa pe locul doi în lume ca mărime după Rusia, dar mai mare decât Canada, Statele Unite sau China. Al-Mansur era un calif iluminat, iar pentru a-şi construi capitala a adus din lumea arabă cei mai buni arhitecţi, artizani şi artişti. Alegerea locului şi a datei de început a lucrărilor le lasă în seama geografilor şi astrologilor săi.

Va fi nevoie de patru ani şi mai mult de o sută de mii de muncitori pentru a înălţa din temelie

oraşul pe care îl visa. Cetatea are particularitatea de a fi perfect rotundă. Zidul său dublu de la exterior, lung de opt kilometri circumferinţă, este fortificat de o sută douăsprezece turnuri şi se deschide prin patru porţi orientate conform diagonalelor celor patru puncte cardinale. în centrul oraşului se află cazarmele, moscheea şi palatul califului, al cărui dom de culoare verde se înalţă la aproape cincizeci de metri de sol şi este vizibil de la douăzeci de kilometri.

în momentul inaugurării sale, cetatea va fi numită Mad nat as-Sal m, adică Cetatea Păcii. Va fi numită şi Mad nat al-Anw r, adică Cetatea Luminilor sau ' simat ad-Duny , Capitala Lumii. Totuşi, oraşul lui Al-Mansur va intra în istorie sub un alt nume: Bagdad.

Populaţia Bagdadului va atinge rapid mai multe sute de mii de locuitori. Cetatea se află la intersecţia marilor căi comerciale, iar străzile sunt un furnicar de negustori veniţi din cele patru colţuri ale lumii. Tarabele sunt pline de mătase, aur şi fildeş, aerul se umple de parfumuri şi de condimente, oraşul zumzăie de poveşti din depărtări. Suntem în epoca celor *O mie şi una de nopţi* şi a legendelor; a acelora cu sultani, viziri şi prinţese, cu covoare zburătoare, duhuri şi lămpi magice.

Al-Mansur si califii care-i vor urma doresc să facă

din Bagdad un oraş de primă clasă pe plan cultural şi ştiinţific. Pentru acest lucru şi pentru a-i determina pe cei mai mari oameni de ştiinţă să vină aici, ei se vor folosi de o momeală care şi-a dovedit deja eficacitatea cu o mie de ani mai devreme în Alexandria: crearea unei biblioteci.La sfârşitul secolului al VUI-lea, califul Hârun ar-Rachîd începe să alcătuiască o colecţie de cărţi cu dorinţa de a păstra şi de a revitaliza cunoştinţele acumulate de greci, mesopotamieni, egipteni sau indieni.

Numeroase texte sunt copiate şi traduse în arabă. Operele greceşti, care circulă în mare număr în mediile intelectuale, vor fi primele integrate de către oamenii de ştiinţă din Bagdad. în câţiva ani, mai multe ediţii arabe ale *Elementelor* lui Euclid vor vedea lumina zilei. Vor fi traduse totodată mai multe tratate ale lui Arhimede, printre care şi cel cu privire la măsurarea cercului, *Almagestele* lui Ptolemeu sau *Aritmetica* lui Diophante.

La începutul secolului al IX-lea, matematicianul Mohamed al-Khw rizm publică o operă importantă, *Cartea despre calculul indian,* în care expune sistemul de numerotare zecimal de sorginte indiană. Datorită lui, cele zece cifre, inclusiv zero, se vor răspândi în toată lumea arabă, iar de aici se vor impune în mod definitiv în întreaga lume. în arabă, zero se pronunţă *zifr;* care înseamnă „vid”. Când va ajunge în Europa,

acest cuvânt se va dedubla. Pe de o parte, în italiană va deveni „zefiro” ce va da numele „zero”-ului nostru, pe de alta, va fi „cifra” în latină, care va desemna cuvântul „cifră.” Uitând rădăcinile indiene ale celor zece simboluri, europenii le vor denumi cifre arabe.

în 809, Hârun ar-Rachîd moare, iar fiul său Al-Am n îl înlocuieşte. Acesta din urmă nu va domni mult timp, fiind detronat în 813 de fratele său, Al-Mamun.

Legenda spune că într-o noapte, Al-Mamun l-a văzut în vis pe Aristotel. Această întâlnire îl impresionează profund pe tânărul calif, care se decide să dea un nou impuls cercetărilor ştiinţifice şi să primească şi mai mulţi oameni de stiintă în oraşul său. Asa se face că în 832 biblioteca Bagdadului dă naştere unei instituţii destinate să favorizeze conservarea si dezvoltarea cunoştinţelor ştiinţifice. Clădirea care adăposteşte această instituţie capătă numele de Bayt al-Hikma, Casa înţelepciunii, al cărei mod de funcţionare aminteşte în mod straniu de acela al Museionului din Alexandria.

Califul se implică puternic în dezvoltarea acesteia. El intervine în mod direct pe lângă marile puteri din străinătate, precum Imperiul Bizantin, pentru a aduce la Bagdad operele rare

care ar putea fi aici copiate şi traduse. El comandă oamenilor de ştiinţă opere destinate să fie difuzate pe întregul califat. Câteodată asistă în persoană la dezbaterile ştiinţifice sau filosofice care sunt organizate cel puţin o dată pe săptămână în sânul Bayt al-Hikma.

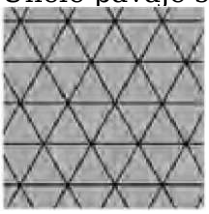
De-a lungul secolelor, Casa înţelepciunii din Bagdad îşi va crea sucursale în întreaga lume arabă. Numeroase alte oraşe îşi vor dota la rândul lor bibliotecile şi instituţiile destinate să-i găzduiască pe oamenii de ştiinţă, printre cele mai influente şi active dintre ele numărându-se cea din Cordoba, în Andaluzia, fondată în secolul al X-lea, cea din Cairo, în Egipt, în secolul al Xl-lea, sau cea din Fes, de pe teritoriul actualului Maroc, în secolul al XlV-lea.

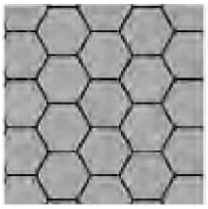
Trebuie să spunem că această descentralizare ştiinţifică va fi facilitată substanţial de apariţia unei invenţii originare din China şi repuse în valoare aproape din întâmplare în 751, în urma bătăliei de la Tablas, din actualul Kazakhstan: este vorba despre hârtie. Ea înlesneşte copierea şi transportul cărţilor. De acum încolo nu mai sunt necesare călătoriile la Bagdad pentru a fi la curent cu ultimele descoperiri în materie de matematică, astronomie sau geografie. Marii oameni de ştiinţă vor putea să lucreze şi să producă opere novatoare în toate cele patru colţuri ale Imperiului Arabo-Musulman.

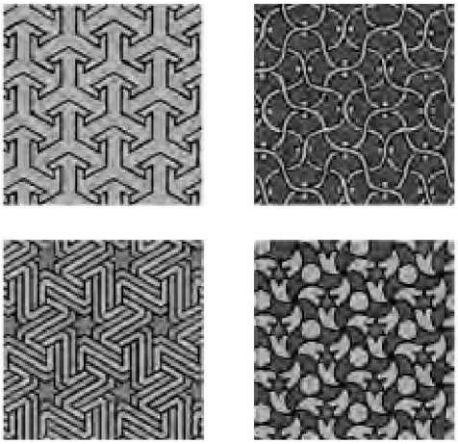
Pavajele din Alhambra

în timp ce în sânul Bayt al-Hikma marile spirite scriu istoria matematicii, o altă istorie îşi continuă firul pe străzile Bagdadului şi ale oraşelor arabe. în principiu, islamul interzice reprezentarea fiinţelor umane sau animale în moschei sau alte locuri religioase. Pentru a îndulci această interdicţie, artizanii musulmani dau dovadă de o creativitate care îţi taie răsuflarea, prin elaborarea unor motive geometrice decorative.

Aduceţi-vă aminte de primii artizani sedentarizaţi ai Mesopotamiei, care imaginau motive diferite pentru a-şi decora vasele. Ei au descoperit, fără să ştie, cele şapte categorii de frize posibile. Dar dacă o friză este o figură care se repetă urmând o direcţie, ne putem la fel de bine imagina că se repetă urmând două direcţii, pentru a acoperi suprafeţe întregi. Acestea din urmă se vor numi „pavaje”. Străzile din Bagdad şi din oraşele musulmane se vor îmbrăcadin ce în ce mai mult cu o geometrie bogată care va deveni una dintre mărcile artei islamice.
Altele sunt mai complexe.
Unele pavaje sunt destul de simple.







Mai târziu, matematicienii vor ajunge să demonstreze că există în total şaptesprezece categorii geometrice de pavaje, clasate în funcţie de transformările geometrice care le lasă invariante. Fiecare dintre aceste categorii poate apoi să dea naştere unei infinităţi de variante diferite. Artiştii arabi, fără a cunoaşte această teoremă, vor descoperi cele şaptesprezece categorii şi le vor expune magistral în arhitectura lor, precum şi în ornamentarea obiectelor de artă sau ale vieţii cotidiene.

în Andaluzia, la Granada, Palatul Alhambra reprezintă unul dintre monumentele cele mai reprezentative pentru prezenţa islamică în Spania Evului Mediu. Mai mult de două milioane de turişti îl vizitează în fiecare an, dar ceea ce puţini dintre ei ştiu este că palatul deţine o reputaţie specială în lumea matematicienilor. Alhambra este, prin urmare, cunoscut pentru

faptul că prezintă fiecare dintre cele şaptesprezece categorii de pavaje existente, diseminate (şi câteodată foarte bine ascunse) de-a lungul sălilor şi grădinilor sale.
Aşadar, dacă veţi trece vreodată prin Granada, ştiţi ce vă rămâne de făcut!

Să mai zăbovim puţin în Bagdad şi să îndrăznim să deschidem porţile Bayt al-Hikma pentru a vedea ce se întâmplă înăuntru. Oare ce fel de matematici noi mai scornesc aceşti matematicieni arabi? Despre ce vorbesc aceste cărţi proaspăt scrise care umplu etajerele bibliotecii?

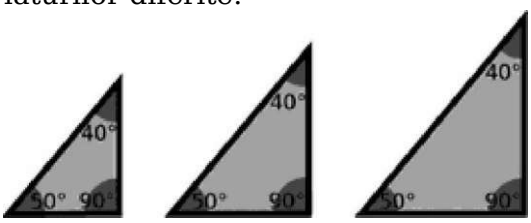
Una dintre disciplinele care se va dezvolta cel mai mult de-a lungul acestei perioade este trigonometria, adică studiul măsurilor trigoanelor, numite şi triunghiuri. La prima vedere, ar părea dezamăgitoare această preocupare, căci popoarele antice au studiat deja triunghiurile. Mărturie stă teorema lui Pitagora. Totuşi, arabii vor continua cercetările până într-acolo încât vor realiza o disciplină de o precizie remarcabilă, ale cărei rezultate au şi astăzi multiple aplicaţii.

Contrar a ceea ce am putea crede, triunghiurile nu sunt întotdeauna aşa de uşor de înţeles şi multe aspecte
ale lor au rămas neelucidate la sfârsitul Antichităţii.
*/

Pentru a cunoaşte bine un triunghi avem nevoie în principal de şase informaţii în legătură cu el: lungimile celor trei laturi şi măsurile celor trei unghiuri.

Numai că, pentru a utiliza trigonometria pe teren, adesea ar fi mai simplu să măsurăm unghiul dintre două laturi decât distanţa dintre două puncte. Astronomia este exemplul cel mai bun în acest sens: a cunoaşte distanţa care separă stelele pe care le observăm pe cer este o problemă foarte grea, iar pentru a răspunde la ea vor mai trece încă multe secole. în schimb, a măsura unghiul pe care îl formează aceste stele între ele sau între ele si linia orizontului este cu mult mai simplu. Un octant, adică strămoşul sextantului, ne-ar fi suficient în acest sens. în acelaşi fel, un geograf care vrea să stabilească harta unui teritoriu va putea să măsoare cu uşurinţă unghiurile unui triunghi format din trei munţi. Pentru acest lucru nu are nevoie decât de o alidadă, care nu-i nimic altceva decât un raportor prevăzut cu un sistem optic, iar pentru a orienta harta în spaţiu, o simplă busolă îi va permite să măsoare unghiul între nord şi o altă direcţie dată. A măsura distanta între trei munţi necesită, în schimb, or- ganizarea unei expediţii mult mai complicate şi a unor calcule care sunt în mod evident mult mai complexe. Alexandru şi bematiştii săi nu ne vor contrazice cu privire la aceste eforturi!

Scopul jocului este în acest caz următorul: cum putem dobândi toate informaţiile cu privire la un triunghi, măsurând cât mai puţine distanţe posibil? Punându-şi această întrebare, trigonometrii se vor confrunta cu o problemă asemănătoare aceleia puse de cercul lui Arhimede cu o mie de ani mai devreme. Mai întâi, dacă veţi cunoaşte toate unghiurile unui triunghi, dar nicio latură a sa, îi puteţi deduce forma, dar nu şi mărimea. Ca dovadă, triunghiurile următoare au unghiurile identice, dar lungimile laturilor diferite.

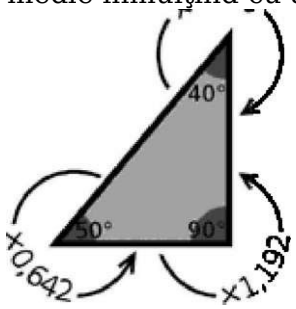


Toate au însă aceleaşi proporţii. De exemplu, dacă ne întrebăm cu ce număr trebuie să înmulţim lungimea celei mai mari laturi pentru a o obţine pe cea mai mică, vom regăsi acelaşi rezultat pentru fiecare dintre cele trei triunghiuri: 0,64. Cam în acelaşi fel procedăm cu perimetrul unui cerc, care se obţine întotdeauna înmulţind diametrul cu 7t, indiferent cât de mare ar fi mărimea lui.

$t \cdot t$

în tot cazul, vorbim de aproape 0,64. Acest număr nu este decât o aproximaţie. Precum în

cazul lui **ττ**, această proporţie nu se poate calcula cu precizie şi va trebui să ne mulţumim cu valorile ei apropiate. Cu ceva mai multă precizie, vom obţine 0,642 sau chiar 0,64278, dar mereu va fi insuficient. Scrierea zecimală a acestui număr are o infinitate de cifre după virgulă. Acelaşi lucru se întâmplă şi cu alte raporturi care se pot calcula în aceste triunghiuri. Astfel, se trece de la latura mare la cea medie înmulţind cu aproximativ 0,766, iar de la cea mică la cea medie înmulţind cu aproximativ 1,192.



Deoarece este imposibil să atribuim acestor trei raporturi valori exacte, matematicienii le-au dat denumiri pentru a putea să le studieze mai bine. Mai multe nume s-au folosit în funcţie de loc şi epocă, dar astăzi noi le numim „cosinus”, „sinus” şi „tangentă”. Numeroase variante au fost totodată inventate şi exploatate înainte de a cădea în uitare. *Sekedul* de care se serveau egiptenii pentru a calcula panta piramidelor este un astfel de exemplu. Coarda, introdusă de greci şi care corespunde unui raport într-un triunghi isoscel, este un altul.

Raporturile trigonometrice vor pune totuşi o nouă problemă. Valorile acestea variază de la un triunghi la altul. Astfel, raporturile de 0,642; 0,766 şi 1,192 sunt valabile doar în cazul triunghiurilor care au unghiurile de 40°, 50°, 90°. Dacă, din contră, avem un triunghi dreptunghic cu unghiurile de 20°, 70° şi 90°, atunci cosinusul, sinusul şi tangenta vor avea valorile de aproximativ 0,342, 0,940 şi 2,747. Pe scurt, sarcina matematicienilor trigonometri este mult mai complexă decât era de aşteptat. Nu este vorba doar despre găsirea unui număr, nici măcar a trei numere, ci despre tabele întregi de numere care variază în funcţie de toate unghiurile posibile pe care va trebui să le calculăm.
în continuare este prezentat un tabel trigonometric pentru triunghiurile dreptunghice în care unul dintre unghiuri variază între 10° şi 80°. Observaţi că pentru fiecare triunghi este dat un singur unghi. De fapt, nu este nevoie să indicăm cele două unghiuri care pot fi regăsite fără greutate: pe de o parte, unghiul drept măsoară întotdeauna 90°, iar pe de altă parte, o teoremă spune că suma celor trei unghiuri dintr-un triunghi este întotdeauna 180°, lucru care ne permite să-l deducem pe cel de-al treilea. Ce-i drept, nici măcar nu este nevoie să mai trasăm triunghiurile: dacă

avem doar un unghi este suficient pentru a-l reconstitui

Puterea triunghiurilor

Triunghi	Cosinus	Sinus	Tangentă
	0,9848	**0,1736**	**0,1763**
	0,9397	**0,3420**	**0,3640**
	0,8660	**0,5**	**0,5774**
	0,7660	**0,6428**	**0,8391**
	0,6428	**0,7660**	**1,1918**
60^	**0,5**	**0,8660**	**1,7321**
	0,3420	**0,9397**	**2,7475**

8oj	**0,1 736**	**0,9848**	**5,6713**

Iată de ce prima coloană din tabelul trigonometric indică, în general, doar unghiul. Vom spune astfel că avem cosinusul de 10° egal cu 0,9848 sau că tangenta de 50° este de 1,1918.

Bineînţeles că un tabel trigonometric nu este niciodată complet. întotdeauna poate fi îmbunătăţit, fie prin găsirea celor mai bune aproximări ale raporturilor care se găsesc în el, fie prin rafinarea evantaiului de triunghiuri reprezentate. în tabelul prezentat apar triunghiuri ale căror unghiuri variază din 10° în 10°, deşi ar fi de preferat să avem o precizie de un grad sau chiar o zecime de grad. Pe scurt, a calcula tabelele trigonometrice din ce în ce mai exact constituie o sarcină fără sfârşit, la care generaţii de matematicieni se vor înhăma pe rând. Va trebui să aşteptăm apariţia calculatoarelor electronice în secolul XX pentru a-i elibera, în sfârşit, pe matematicieni de această sarcină.

Grecii au fost fără îndoială primii care au elaborat tabele trigonometrice. Cele mai vechi care ne-au parvenit se găsesc în *Almageste* a lui Ptolemeu şi ar fi fost împrumutate de la Hipparc din Niceea, un matematician din secolul al II-lea înaintea erei noastre. La sfârşitul secolului al V-lea, savantul indian Aryabhata va publica şi el

tabelele sale trigonometrice. în Evul Mediu îi vom regăsi pe perşii Omar Khayyam, în secolul al Xl-lea, şi al- Kashi, în secolul al XlV-lea, care sunt printre cei care vor elabora cele mai cunoscute tabele.

Oamenii de ştiinţă din lumea arabă vor juca un rol primordial, nu doar în sensul contribuţiei la elaborarea tabelelor foarte precise, ci mai ales pentru ceea ce vor face cu acestea. Ei vor duce pe culmi arta de a jongla cu aceste date si de a le utiliza într-un mod cât mai eficient posibil.

Astfel se face că în 1427 al-Kashi va publica o lucrare intitulată *Miftah al-Hisab* sau *Cheia Aritmeticii,* în care el enunţă un rezultat care generalizează teorema lui Pitagora. Datorită unei ingenioase utilizări a cosinusurilor, al-Kashi ajunge să elaboreze o teoremă care se aplică absolut tuturor triunghiurilor, şi nu doar celor dreptun- ghice. Teorema lui al-Kashi funcţionează printr-o corecţie adusă teoremei lui Pitagora: atunci când triunghiul nu este dreptunghic, suma pătratelor care se pot construi pe primele două laturi nu este egală cu pătratul construit pe cea de-a treia latură. Totuşi, această egalitate devine adevărată cu condiţia de a adăuga un termen corector care se calculează direct, pornind de la cosinusul unghiului dintre primele două laturi.

Când al-Kashi publica acest rezultat, el nu mai era un necunoscut în lumea matematică, devenise celebru trei ani mai devreme prin calcularea unei aproximări a numărului n până la cea de-a şaisprezecea zecimală. Era un record pentru epoca respectivă! Dar dacă recordurile sunt făcute pentru a fi doborâte[I], teoremele, în schimb, rămân fixe. Teorema lui al-Kashi este până în ziua de astăzi unul dintre rezultatele trigonometrice cele mai utilizate.

Suntem în luna iunie pe Rive Gauche[II] la Paris şi iată-mă transformat într-un ghid turistic mai special.

Astăzi, împreună cu un grup de douăzeci de persoane, parcurgem străzile Cartierului Latin pe urmele matematicii şi ale istoriei sale.

Următoarea noastră oprire este prevăzută în grădina marilor exploratori. La nord, vedem aleile simetrice ale Grădinii Luxembourg, fugind în rânduri masive spre palatul Senatului. La sud, cupola Observatorului din Paris îşi umflă silueta rotunjită deasupra acoperişurilor capitalei.

Urmând axa grădinii, mergem ca pe sârmă pe linia precisă a meridianului Parisului. Un pas mai la stânga, şi suntem în emisfera estică a lumii. Doi paşi la dreapta, şi vom ajunge în cea vestică. Cinci sute de metri mai încolo meridianul

I Matematicianul olandez Ludolph Van Ceulen va calcula o sută şaptezeci de ani mai târziu până la 35 de zecimale. *(N.a.)*

II Malul stâng al Senei. *(N.r.)*

traversează Observatorul chiar prin inima sa, continuând prin mijlocul celui de-al 14-lea arondisment, apoi iese din Paris prin parcul Montsouris. îşi continuă drumul peste zona rurală franceză, taie o bucată din Spania şi se aruncă peste continentul african şi Oceanul Antarctic pentru a-şi continua cursa până la Polul Sud. în spatele nostru urcă pe străzile Montmartre-ului, străbate insulele britanice şi Norvegia, pentru a ajunge la Polul Nord.

Nu a fost un lucru uşor să se stabilească trasarea exactă a meridianului. Acest lucru va cere efectuarea de calcule precise de-a lungul unor întinderi imense. Cum procedăm, de exemplu, pentru a măsura distanţa între două puncte situate de-o parte şi de alta ale unui munte fără a fi nevoie să îl traversăm? Pentru a răspunde la această întrebare, oamenii de ştiinţă de la începutul secolului al XVIII-lea au alcătuit meridianul pornind de la o succesiune de triunghiuri virtuale care străbat Franţa de la nord la sud.

Ca loc de plecare al triangulaţiei au fost alese punctele aflate pe înălţimi, precum colinele, munţii sau clopotniţele, de unde era posibil să fie văzute alte puncte pentru a măsura unghiurile dintre ele.

Odată ce măsurătorile au fost făcute pe teren, nu mai rămânea decât să fie utilizate din belşug procedeele trigonometrice puse la punct de arabi

pentru a determina poziţia exactă a punctelor triangulaţiei şi, cu ajutorul lor, a meridianului.

Cei din neamul Cassini vor fi primii care se vor dedica acestei misiuni. Familia Cassini este o adevărată dinastie de oameni de ştiinţă şi are atâţia reprezentanţi de seamă, încât am putea să-i numerotăm cum îi numerotăm pe regi.

Giovanni Domenico, numit şi Cassini I, proaspăt emigrat din Italia, a fost primul director al Observatorului din Paris odată cu inaugurarea sa din 1671.

Fiul lui, Jacques, zis Cassini al II-lea, îi va urma după moartea sa din 1712. Ei vor fi cei care vor stabili prima triangulaţie a meridianului, care a fost încheiată în 1718.

După ei, Cassini al III-lea (César-François, fiul lui Jacques) a făcut din triunghiulaţia meridianului coloana vertebrală a primei triangulaţii complete a teritoriului francez. în urma acestor calcule va rezulta publicarea, în 1744, a primei hărţi a Franţei realizată printr-un procedeu ştiinţific riguros.

Fiul acestuia, Cassini al IV-lea, pe numele de botez Jean-Dominique, îi va continua munca îmbunătăţind şi mai mult triangulaţia pe fiecare regiune.

Harta Franţei din 1744, pe care este reprezentat meridianul Parisului, precum şi principalele triunghiuri ale lui Cassini.

Mergând pe acest meridian, urmăm indirect paşii oamenilor de ştiinţă arabi care au pus bazele teoretice ale acestor triangulaţii. Fiecare triunghi de pe hartă a necesitat folosirea cosinusului, a sinusului sau a tangentei. Fiecare dintre ele poartă în forma lui moştenirea lui al-Kashi şi a primilor trigonometri din Bagdad. Pentru toate aceste calcule făcute cu creionul a fost nevoie de nenumărate ore de muncă însoţite de tabele trigonometrice
făcute de oamenii de stiintă ai Observatorului.
//

Triangulaţiile au continuat să fie folosite până la sfârşitul secolului XX, odată cu apariţia sateliţilor. Cele mai precise reţele numărau până la 80 000 de puncte. Bornele care marcau aceste puncte sunt vizibile şi astăzi, fiind răspândite aproape pe tot teritoriul francez. La Paris se pot încă vedea cele două repere care determină axa meridianului: unul se găseşte în sud, în parcul Montsouris, iar celălalt la nord de Montmartre. în 1994, o sută treizeci si cinci de medalioane cu numele astronomului François Arago au fost aşezate pe traiectoria meridianului din capitală. Unul dintre ele se găseşte chiar în interiorul muzeului Luvru. Data viitoare când vă veţi plimba pe străzile pariziene, deschideţi ochi, căci s-ar putea să întâlniţi câteva!

Atunci când sistemul metric, din dorinţa de univer- salitate, a văzut lumina zilei, în urma Revoluţiei franceze, lungimea metrului a fost raportată la cea a meridianului. Un metru a fost definit cu precizie ca fiind a zecea milionime dintr-un sfert de meridian. în 1796, şaisprezece metri etalon au fost sculptaţi în marmură şi instalaţi în cele patru colţuri ale Parisului pentru ca oricine să poată veni să şi le ia ca reper. Două dintre acestea sunt vizibile şi astăzi. Unul pe strada Vaugirard, în faţa Grădinii Luxembourg, iar celălalt în piaţa Vendôme, la intrarea în Ministerul de Justiţie.

Meridianul Parisului a fost de referinţă până la Conferinţa Internaţională de la Washington, în

1884, când a fost înlocuit de meridianul Greenwich, ce trece prin Observatorul Regal din Londra. Drept compensaţie, britanicii s-au angajat să adopte sistemul metric. Aşteptăm şi astăzi să se întâmple acest lucru!

Odată cu apariţia informaticii şi a sateliţilor, tabelele trigonometrice şi triangulaţiile la sol au devenit inutile. Dar, în tot cazul, trigonomia nu a dispărut. Ea şi-a găsit locul în inima procesoarelor computerelor. Triunghiurile sunt ascunse, dar sunt mereu acolo.

Iată, priviţi maşinile care se perindă pe bulevardul Observatorului. Multe dintre ele sunt echipate cu sisteme de poziţionare GPS. în fiecare moment, traiectoriile lor sunt determinate prin poziţionarea relativă faţă de patru sateliţi care le urmăresc din spaţiu. Rezolvarea ecuaţiilor care rezultă din aceste calcule face apel încă o dată la trigonometrie. Ştiu, oare, conducătorii auto că această voce care le ordonă calm să o ia la stânga vorbeşte chiar în momentul în care au fost calculate câteva sinusuri sau cosinusuri?

Şi apoi aţi auzit probabil, în miezul serialului poliţist preferat, cum unul dintre anchetatori anunţă că telefonul suspectului a fost localizat prin triangulaţie? Acest gen de poziţionare constă în determinarea poziţiei unui telefon mobil în funcţie de distanţa sa faţă de cele mai apropiate trei antene-releu. Această problemă de geometrie se rezolvă fără mare greutate cu ajutorul câtorva

formule de trigonometrie pe care calculatoarele noastre le efectuează în prezent cu viteza luminii.

Nemultumindu-se doar cu măsurarea realităţii, trigonometria se va insinua şi în crearea lumilor virtuale. Filmele de animaţie 3D şi jocurile video se folosesc din abundenţă de ea. în spatele texturilor pe care le prezintă graficienii, formele 3D sunt alcătuite din înlănţuiri geometrice care ne aduc aminte în mod deosebit de tri- angulaţiile familiei Cassini. Aceste înlănţuiri sunt cele care, deformându-se, animează obiectele şi personajele. Calculul celei mai mărunte imagini de sinteză, precum cea a ceainicului din Utah, care a fost unul dintre primele obiecte modelate pe calculator, în 1975, a necesitat aplicarea unui număr mare de formule trigonometrice.

10

Spre o necunoscută

Să ne întoarcem la Bagdad! Dintre toţi oamenii de ştiinţă care frecventează Bayt al-Hikma, unul dintre ei îşi va marca în mod deosebit epoca: Muhammad ibn al-Khw rizm .

Al-Khw rizm este un matematician persan născut în anul 780. Familia sa este originară din regiunea Khwarezm, care se întinde pe actualele teritorii din Iran, Uzbekistan şi Turkmenistan. Nu se cunoaşte cu siguranţă dacă al-Khw rizm s-a născut acolo sau dacă părinţii au emigrat la Bagdad înainte de naşterea sa, însă ştim că în acest oraş tânărul savant se va fi aflat la începutul secolului al IX-lea. El va fi printre primii oameni de ştiinţă care s-au alăturat Bayt al-Hikma şi şi-a construit aici o reputaţie de prim rang.

Pe străzile Bagdadului, al-Khw rizm este cunoscut mai ales ca astronom. El scrie mai multe tratate teoretice, care reiau cunoştinţele greceşti sau indiene, precum şi lucrări practice

despre utilizarea unui cadran solar sau fabricarea unui astrolab. îsi utilizează totodată cunostintele pentru a elabora tabele geografice care conţin latitudini şi longitudini ale celor mai importante locuri din lume. Meridianul său de referinţă, inspirat din Ptolemeu, rămâne totuşi aproximativ. Se consideră că acesta trecea prin Insulele Norocoase, al căror amplasament mai mult sau mai puţin mitologic pare a fi situat în extremitatea vestică a lumii şi ar putea corespunde actualelor Insule Canare.

în matematică, al-Khw rizm este cel care va scrie faimoasa *Carte asupra calculului indian*, ce va prezenta întregii lumi sistemul zecimal poziţional. Şi dacă ar fi scris numai această carte ar fi fost suficient să intre în Panteonul matematicienilor. Cu toate acestea, o altă carte - având un continut revoluţionar - va fi cea care îi va asigura un loc definitiv printre cei mai mari matematicieni din istorie, alături de Arhimede şi Brahmagupta.

Al-Mamun în persoană va fi cel care îi va comanda această carte, căci califul dorea să pună la dispoziţia populaţiei un manual de matematică util pentru toată lumea, în vederea rezolvării problemelor care se pun în viata de zi cu zi. Al-Khw rizm s-a conformat si a înce-

put să compileze o listă de probleme clasice însoţite de metoda lor de rezolvare. Regăsim aici, printre altele, probleme despre măsurarea terenurilor, despre tranzacţiile comerciale sau despre repartizarea unei moşteniri între diferiţii membri ai unei familii.

Cu toate că sunt foarte interesante, toate aceste probleme nu aduc nimic nou, iar dacă al-Khw rizm ar fi respectat strict cererea califului, fără îndoială că această carte nu ar fi rămas posterităţii. Totuşi, savantul persan nu se opreşte aici şi decide să adauge în introducerea lucrării o primă parte pur teoretică. El prezintă, într-o manieră structurată şi abstractă, diferitele metode de rezolvare care sunt puse în practică în problemele concrete.

Odată lucrarea terminată, al-Khw rizm o va numi *Kit b almukhta ar f ist b al-jabr wa-l-muqt bala (Compendiu de calcul prin restaurare şi comparaţie).* Atunci când, mai târziu, a fost tradusă în latină, ultimele cuvinte ale titlului în arabă au fost reluate fonetic, iar cartea s-a numit *Liber Algebrae* şi *Almucabola.* Puţin câte puţin s-a renunţat la termenul *Almucabola* şi s-a lăsat loc doar cuvântului care de acum încolo va desemna disciplina iniţiată de al-Khw rizm : al-Jabr, *algebrae,* algebră.

în afară de continutul matematic, ceea ce revolu-
tionează al-Khw rizm este formularea metodei sale. El

va detalia procedeele de rezolvare ale problemelor independent de problemele însele. Pentru a înţelege mai bine acest lucru, să ne aplecăm asupra următoarelor trei întrebări:

1. *Un câmp dreptunghiular are 5 unităţi în lăţime şi o suprafaţă de 30. Cât măsoară lungimea sa?*
2. *Un om de 30 de ani are de 5 ori vârsta fiului său. Ce vârstă are fiul?*
3. *Un vânzător a cumpărat 30 de kilograme de stoß în 5 role identice. Cât cântăreşte fiecare rolă?*

în toate cele trei cazuri răspunsul este 6. Şi vedem foarte bine că, rezolvând aceste probleme, indiferent de subiectul pe care îl tratează, matematica aflată în spatele unor situaţii complet diferite este aceeaşi. în toate cele trei cazuri rezultatul se află printr-o împărţire: 30 : 5 = 6. Primul demers al lui al-Khw rizm constă în a deposeda aceste întrebări de contextul lor pentru a extrage o problemă pur matematică:

Se caută un număr care înmulţit cu 5 să dea 30.

în această formulare ignorăm ce reprezintă numerele 5 şi 30. Ar putea foarte bine să fie vorba despre dimensiuni geometrice, vârste, role de stofă sau orice altceva. Acest lucru nu schimbă cu nimic modul în care vom proceda în aflarea răspunsului. Obiectivul algebrei este aşadar să propună metode care să permită rezolvarea acestui tip de ghicitori pur matematice. în

Europa, ele vor căpăta, câteva secole mai târziu, numele de „ecuaţii”.

Al-Khw rizm merge şi mai departe cu studiul ecuaţiilor. El spune că metoda nu mai depinde nici măcar de datele numerice ale problemei. Priviţi următoarele trei ecuaţii:

1. Se caută un număr care înmultit cu 5 să dea 30.

2. Se caută un număr care înmultit cu 2 să dea 16.

3. Se caută un număr care înmultit cu 3 să dea 60.

Fiecare dintre aceste ecuaţii grupează prin formularea sa o multitudine de probleme diferite, concrete. Ştim că pentru rezolvarea lor se va recurge la aceeaşi metodă, în cele trei cazuri regăsim soluţiile prin împărţirea celui de-al doilea număr la primul: în primul caz 30 : 5 = 6, pentru al doilea 16 : 2 = 8 şi pentru al treilea 60 : 3 = 20. Aşadar, metoda de rezolvare nu este independentă numai de problema concretă, ci şi de numerele care intervin în această problemă.

Este posibil, astfel, să formulăm aceste ecuaţii într-o manieră si mai abstractă:

Se caută un număr anume care, înmulţit cu o cantitate 1, să dea o cantitate 2.

Toate problemele de acest tip vor putea fi rezolvate în acelaşi fel: este suficient să împărţim cantitatea 2 la cantitatea 1.

Bineînţeles că acest exemplu este foarte simplu. El nu presupune decât o înmulţire, iar rezolvarea utilizează doar o împărţire. Dar sunt posibile şi alte tipuri de ecuaţii în care necunoscuta să suporte mai multe operaţii diferite. Al-Khw rizm se va apleca, în principal, asupra ecuaţiilor în care necunoscuta suportă patru operaţii de bază (adunare, scădere, înmulţire şi împărţire), precum şi ridicarea la putere. Iată un astfel de exemplu:
Se caută un număr al cărui pătrat să fie egal cu de 3 ori valoarea sa mărită de 10 ori.

De data aceasta rezultatul este 5. Pătratul lui 5 este 25 şi avem 25 = 3 x 5 + 10. Am avut noroc, căci această soluţie este un număr întreg şi a fost posibil să-l ghicim prin mai multe încercări. Dar când soluţiile sunt numere foarte mari sau cu virgulă, este necesar să dispunem de o metodă precisă care să ne permită să le găsim valorile într-un mod sistematic. Exact acest lucru îl construieşte al-Khw rizm în introducerea cărţii sale.

"El descrie aici etapă cu etapă calculele pe care trebuie să le efectuăm pornind de la datele problemei şi indiferent de aceste date. Al doilea pas a fost să redacteze si demonstraţiile care dovedesc că metodele sale sunt funcţionale."

Aşadar, demersul lui al-Khw rizm se înscrie perfect în dinamica globală a matematicii care tinde spre abstracţie şi generalitate. De mult timp deja obiectele matematice deveniseră independente de obiectele reale pe care le reprezentau. Odată cu al-Khw rizm , raţionamentele pe care le facem asupra obiectelor se detaşează de problemele pe care trebuie să le rezolve.

Clasificarea ecuaţiilor

Nu toate ecuaţiile sunt uşor de rezolvat. Există chiar unele cu care matematicienii de astăzi încă îşi bat capul. Dificultatea unei ecuaţii depinde în mod esenţial de operaţiile care o compun. Astfel, dacă necunoscuta nu suportă decât adunări, scăderi, înmulţiri şi împărţiri, se vorbeşte despre ecuaţii de gradul I. Iată câteva exemple:

Ce număr dă 10 dacă îi adăugăm 3? Ce număr dă 15 dacă îl împărţim cu 2? Ce număr dă 0 dacă îl înmulţim cu 2 după ce i-am scăzut 10?

Ecuaţiile de gradul I sunt cel mai simplu de rezolvat. Dacă ne gândim puţin, vom găsi soluţiile celor trei: 7, căci 7 + 3 = 10, apoi 30, căci 30 : 2 = 15 şi, în sfârşit, 5 x 2 - 10 = 0.

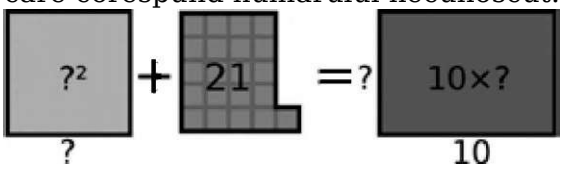
Dacă la aceste patru operaţii adăugăm ridicarea la pătrat, adică operaţia care constă în înmulţirea necunoscutei cu ea însăşi, trecem la ecuaţiile de gradul II, iar dificultatea acestora este mai mare. Exact aceste ecuaţii de gradul II sunt cele pe care al-Khw rizm le rezolvă în lucrarea sa. Iată câteva exemple pe care le tratează savantul persan:

Spre o necunoscută

Pătratul unui număr plus douăzeci şi unu este egal cu de zece ori acest număr.
Pătratul unui număr căruia îi adăugăm de zece ori acest
număr dă treizeci si nouă.

Una dintre particularităţile ecuaţiilor de gradul II constă în aceea că pot să aibă două soluţii. Aşa este cazul şi aici: numerele 3 şi 7 răspund la prima ecuaţie, deoarece 3 x 3 + 2 1 = 3 x l 0 şi 7 x 7 + 2 1 = 7 x 10. Şi a doua ecuaţie are două soluţii: 3 şi -13.

în secolul al IX-lea tot geometria reprezintă disciplina de referinţă în matematică, iar demonstraţiile lui al-Khw rizm sunt formulate în mod sistematic în termeni geometrici. După interpretarea iniţiată de oamenii de ştiinţă antici, pătratul unui număr şi înmulţirea a două numere se pot reprezenta ca nişte suprafeţe. O ecuaţie de gradul II poate, deci, să fie tratată precum o problemă de geometrie plană. De exemplu, iată versiunile geometrice ale celor două ecuaţii precedente. Semnele de întrebare sunt lungimile care corespund numărului necunoscut.



Pătratul unui număr plus douăzeci şi unu este egal cu de zece ori acest număr.

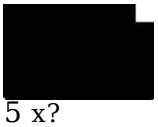
? ?2 + ? i g x ? = 39

? 10

Pătratul unui număr căruia îi adăugăm de zece ori acest număr dă treizeci şi nouă.

Al-Khw rizm rezolvă aceste probleme cu ajutorul metodei îmbunătăţite a puzzle-ului. El decupează piesele, adaugă sau scoate bucăţi în funcţie de necesităţi, pentru a obţine o figură care face să apară soluţia.

Să observăm, de exemplu, cea de-a doua ecuaţie, unde metoda începe prin decuparea dreptunghiului care reprezintă de 10 ori necunoscuta în două dreptunghiuri care au fiecare de 5 ori necunoscuta.



5 x?

+ ?

5x?

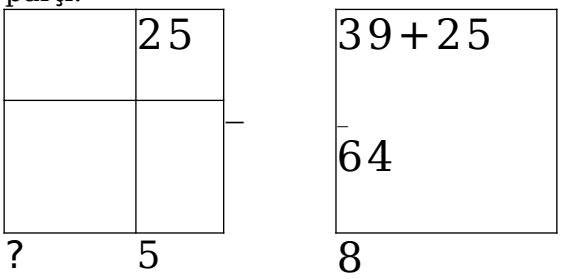
?2 T

”39

Apoi, el redispune piesele în felul următor:

5x?	
72	**5x?**

în sfârşit, el adaugă celor două laturi ale egalităţii o piesă care are o suprafaţă de douăzeci şi cinci, astfel încât să reconstituie pătratele de ambele părţi.



Pătratul din stânga va avea o latură egală cu necunoscuta mărită de 5 ori, în timp ce cel din dreapta are o latură egală cu 8. Deducem că necunoscuta are valoarea 3.

Să remarcăm că figura precedentă este foarte grosier proporţionată. Era imposibil să ştim înaintea rezolvării sale că necunoscuta avea valoarea 3, iar lungimile reprezentate nu sunt corecte. Acest lucru nu are niciun fel de importanţă, deoarece nu valorile numerice sunt cele care contează aici, ci faptul că acelaşi decupaj funcţionează indiferent de numerele particulare care apar în aceste ecuaţii. O zicală pretinde că geometria este arta de a gândi corect asupra unor figuri false. Iată o ilustrare perfectă! Totuşi trebuie să notăm că, prin această metodă, necunoscuta este o lungime, adică un număr pozitiv. Soluţiile

negative ne-ar întinde o capcană. în momentul în care ecuaţia are o soluţie egală cu -13, al-Khw rizm o ocoleşte pur şi simplu. După gradul II urmează cel de-al III-lea. De astă dată este posibil să introducem cubul necunoscutei. Aceste ecuaţii sunt şi mai complexe pentru al-Khw rizm şi vor fi rezolvate abia în perioada Renaşterii. Dacă le interpretăm în termeni geometrici, vom da peste o problemă a volumelor în trei dimensiuni. Apoi urmează ecuaţiile de gradul IV. Dintr-un punct de vedere numeric, aceste ecuaţii se pun fără nicio greutate, dar reprezentarea lor geometrică ne va trăda, căci ar trebui să ne imaginăm figuri în patru dimensiuni, lucru care nu este posibil în lumea noastră limitată la trei dimensiuni

.Această capacitate a algebrei de a genera probleme care sunt *a priori* inaccesibile geometriei va fi în cea mai mare parte responsabilă de răsturnarea care se va produce în Renaştere, când prima îi va răpi celei de-a doua titlul de disciplină-regină a matematicii.

La sfârşitul secolului al IX-lea, matematicianul egiptean Abu Kamil este unul dintre principalii urmaşi ai lui al-Khw rizm . El va generaliza metodele savantului persan şi se va interesa în mod special de sistemele de ecuaţii. Aceste sisteme constau în găsirea simultană a mai

multor numere necunoscute, pornind de la mai multe ecuaţii. Iată un exemplu clasic:
Turma unui crescător de animale este alcătuită din dromaderi, care au o cocoaşă, şi din cămile, care au două cocoaşe. Se pot număra în total 100 de capete şi 130 de cocoaşe. Câte animale există din fiecare categorie?

Căutăm aici două necunoscute: numărul de dromaderi şi cel de cămile, dar informaţiile de care dispunem sunt amestecate. Capetele şi cocoaşele formează două ecuaţii, dar nu este posibil să le rezolvăm pe acestea în mod independent — este nevoie să luăm în considerare problema ca pe un întreg.

Pentru a aborda această problemă există mai multe metode. O modalitate de gândire este şi următoarea: deoarece există 100 de capetele, există 100 de animale, dar, dacă n-ar fi existat decât dromaderi, am fi avut 100 de cocoaşe şi ar lipsi 30. Deci, există 30 de cămile şi 70 de dromaderi. Avem aici o singură soluţie, dar alte sisteme mai complexe pot avea mult mai multe. Astfel, Abu Kamil, într-una dintre lucrările sale, spune că a rezolvat unele ecuaţii pentru care a găsit 2 676 de soluţii diferite.

în secolul al X-lea, Al Karaji este primul care a scris că se pot imagina ecuaţii de orice grad, chiar dacă situaţiile figurilor pe care reuşesc să le rezolve sunt relativ puţine. în secolele al Xl-lea si al XH-lea se va lansa asaltul

asupra ecuaţiilor de gradul III de către Omar Khayyam şi Sharaf al-D n al-T s . Ei ajung să rezolve unele cazuri particulare şi vor realiza descoperiri semnificative în studiul lor, fără a ajunge totuşi să găsească o metodă sistematică de rezolvare. Multe alte tentative de acest fel vor eşua, iar câţiva matematicieni vor începe să invoce posibilitatea ca aceste ecuaţii să nu fie rezolvabile.

Până la urmă, nu savanţii arabi vor fi cei care vor rezolva problema. în secolul al XlII-lea începe un declin lent al epocii de aur islamice care cunoscuse deja
cei mai frumoşi ani. Raţiunile acestui declin sunt mul-
//
tipie. Dominaţia Imperiului Arabo-Musulman stârneşte poftele celorlalţi şi imperiul este deseori atacat atât pe plan comercial, cât şi militar.

în 1219, hoardele mongole ale lui Ginghis Han invadează Khwarezmul natal al lui al-Khw rizm . în 1258 ele ajung la porţile Bagdadului sub comanda lui Hulagu Han, nepotul lui Ginghis. Califul al-Musta'sim este nevoit să capituleze. Bagdadul este prădat, incendiat, iar locuitorii săi, masacraţi. în aceeaşi epocă, Reconquista[1] teritoriilor din sudul Spaniei de către populaţiile creştine se accentuează. Cordoba, capitala regiunii, va cădea în 1236. Spania este complet recucerită în 1492, cu preluarea Granadei şi a palatului său, Alhambra.

Organizarea ştiinţifică a lumii arabe este suficient de descentralizată pentru a rezista un timp la aceste provocări. Cercetări de prim-plan vor continua să fie realizate până în secolul al XVI-lea, dar roata istoriei se învârte şi Europa se pregăteşte să reia frâiele matematicii.

Recucerirea, procesul prin care regatele creştine din nordul Hispaniei (Spania şi Portugalia de astăzi) au recucerit Peninsula Iberică de la musulmani. *(N.r.*

10

Şiruri

Trebuie să mărturisim că de-a lungul perioadei medievale matematica nu a avut un vânt prielnic în Europa. Totuşi există câteva excepţii. Cel mai mare matematician european al Evului Mediu este fără îndoială italianul Leonardo Fibonacci, născut în Pisa la 1175 si mort în 1250 în acelaşi oras.

Cum putea el deveni un matematician important în această epocă în Europa? Nerămânând acolo! Tatăl lui Fibonacci era reprezentantul negustorilor din Republica Pisa la Bej aia, în Algeria de astăzi. Acolo îşi va primi savantul italian educaţia şi va descoperi lucrările matematicienilor arabi, mai ales cele ale lui al-Khw rizm si [1] / Abu Kamil. întors la Pisa, publică în 1202 *Liber Abaci (Cartea calculelor)* în care va prezenta o întreagă paletă a matematicilor din epocă, mergând de la cifrele arabe la geometria lui Euclid şi trecând prin rezultatele aritmeticii lui Diophante sau ale calculelor de şiruri numerice. De altfel, unul dintre aceste şiruri va căpăta o mare popularitate în secolele care vor urma.

Un sir numeric este o succesiune de numere care se poate prelungi la infinit. Ştim deja câteva astfel de şiruri. Avem şirul de numere impare (1, 3, 5, 7, 9...) sau acela al numerelor pătrate (1, 4, 9, 16, 25...), care sunt printre cele mai simple astfel de

exemple. într-una dintre problemele prezente în *Liber Abaci*, Fibonacci încearcă să modeleze matematic evoluţia unei crescătorii de iepuri. Pentru aceasta, el ia în considerare următoarele ipoteze simplificate:

1. Un cuplu de iepuri nu se află la vârsta reproducerii în primele două luni de viaţă.

2. începând cu cea de-a treia lună, un cuplu dă naştere unui nou cuplu în fiecare lună.

Din aceste ipoteze este posibil să prezicem arborele descendenţei unui tânăr cuplu de iepuri.

kjna 1 2 3 4 5 6

S & 1*1* f* ^

s S

3* JL *Jk & S 40

v

Fiecare linie reprezintă evoluţia unui cuplu de iepuri de-a lungul timpului.

i

Săgeţile reprezintă naşterile.

Se poate observa şirul format de numărul de cupluri de-a lungul timpului. Privind fiecare

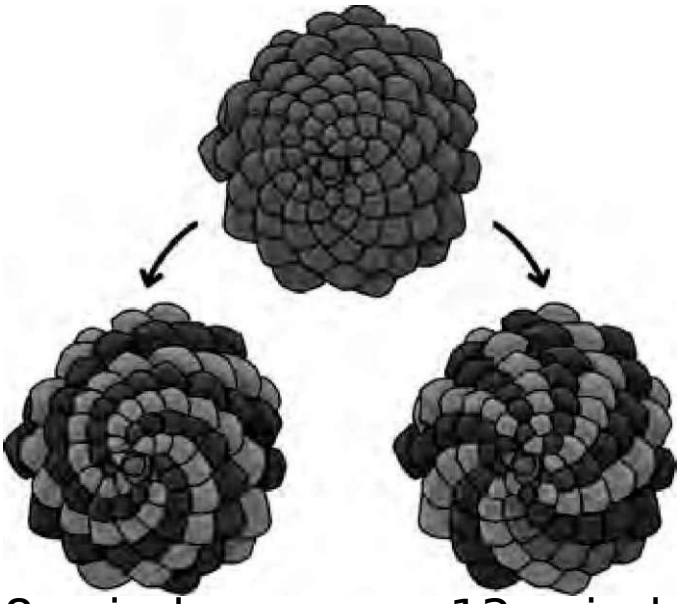
coloană, observăm că arborele precedent ne dă valorile primelor şase luni: 1, 1, 2, 3, 5, 8...

Fibonacci va observa că în fiecare lună populaţia de iepuri este egală cu suma celor două luni precedente: 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 5 = 8... şi aşa mai departe. Această regulă se poate explica astfel: în fiecare lună, numărul de cupluri care se nasc şi care, aşadar, se adaugă la iepurii deja prezenţi este egal cu numărul de cupluri ajunse la vârsta procreaţiei din luna precedentă, adică se ajunge la numărul de cupluri care erau deja născute cu două luni înainte. Acum este posibil să calculăm termenii şirului fără să fie nevoie să detaliem cu precizie genealogia iepurilor.
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

Pentru Fibonacci, această problemă este înainte de toate o enigmă recreativă. Totuşi, şirul demografic al iepurilor îşi va găsi în secolele următoare numeroase aplicaţii atât practice, cât şi teoretice.

Unul dintre exemplele cele mai frapante este, fără îndoială, apariţia sa în botanică. Filotaxia este disciplina care studiază felul în care frunzele sau diferitele elemente constitutive ale unei plante sunt aşezate pe tulpină. Dacă observaţi un con de brad, veţi constata că suprafaţa sa este alcătuită din solzi care se înfăşoară în spirale. Mai exact, se poate calcula numărul de spirale care se înfăşoară în sensul acelor de ceasornic şi

numărul de spirale care se răsucesc în sensul invers acelor de ceasornic.



8 spirale 13 spirale

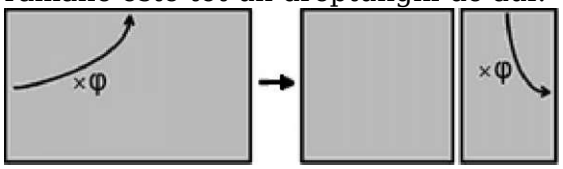
Oricât de uimitor ar putea să pară, aceste două numere sunt întotdeauna doi termeni consecutivi ai şirului lui Fibonacci. De exemplu, plimbându-vă prin pădure, aţi putea să găsiţi conuri de brad de tipul 5-8, 8-13 sau 13-21, dar niciodată 6-9 şi nici 8-11. Aceste spirale ale lui Fibonacci apar într-un mod mai mult sau mai puţin evident la foarte multe alte plante. Dacă pot fi vizibile pe fructul de ananas sau pe inflorescenţa de floarea-soarelui, ele sunt în schimb mult mai puţin vizibile în forma de buchet

a conopidei. Cu toate astea, şirul se regăseşte şi aici.

Numărul de aur

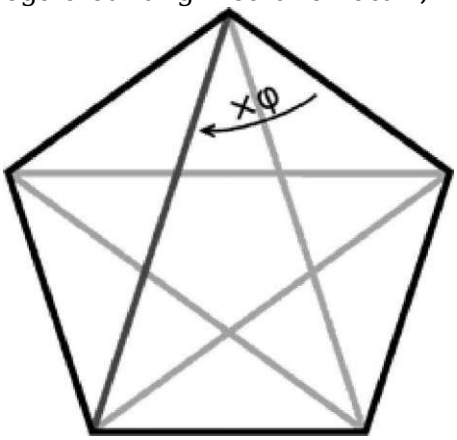
Printre alte curiozităţi, şirul lui Fibonacci ne va mai arăta şi o legătură foarte strânsă cu un număr cunoscut încă din Antichitate: numărul de aur. Valoarea sa este aproximativ egală cu 1,618, iar grecii îl considerau a fi o proporţie perfectă. Precum în cazul lui n, numărul de aur are o scriere zecimală infinită şi de aceea i se dă un nume, adică cp, care se citeşte „fi”.

Numărul de aur se declină în numeroase variante geometrice. Un dreptunghi de aur este un dreptunghi a cărui lungime este de cp ori mai mare decât lăţimea. Proprietăţile numărului de aur fac ca, dacă decupăm un pătrat din lăţimea dreptunghiului, atunci dreptunghiul cel mic care rămâne este tot un dreptunghi de aur.



Grecii îl utilizau cu precădere în arhitectură. Faţada Parthenonului din Atena deţine proporţii foarte apropiate dreptunghiului de aur şi, chiar dacă este greu să avem surse de încredere asupra intenţiilor arhitecţilor, este foarte posibil ca aceste dimensiuni să nu fi fost alese la întâmplare. Primul text care defineşte în mod clar numărul de aur şi care ne-a parvenit până astăzi este *Cartea a VI-a* a *Elementelor* lui Euclid.

Numărul se poate regăsi şi în pentagoanele regulate: diagonalele acestora şi laturile lor se găsesc exact într-un raport de aur. Altfel spus, lungimea uneia dintre cele cinci diagonale este egală cu lungimea unei laturi, înmulţită cu cp.



Numărul de aur se regăseşte astfel în toate structurile geometrice care conţin pentagoane. Aşa cum am văzut, de exemplu, în cazul geodei sau a mingilor de fotbal, despre care am vorbit deja. Atunci când se încearcă bunăoară calcularea valorii sale exacte prin metode algebrice, ajungem la următoarea ecuaţie de gradul II.

Pătratul numărului de aur este egal cu numărul de aur mărit cu o unitate.

Metoda lui al-Khw rizm ne permite să-i găsim formula exactă. Astfel, avem cp = (1+√5): 2 = 1,618034[1]. Puteţi să verificaţi că această valoare

respectă întru totul enunţul ecuaţiei: 1,618034 x 1,618034 * 2,618034.
Dar ce treabă are şirul lui Fibonacci cu această chestiune?
Dacă ne uităm la înmulţirea iepurilor suficient de mult timp, vom observa că în fiecare lună numărul lor este înmulţit cu aproximativ cp. De exemplu, să vedem ce se întâmplă în cea de-a cincea şi a şasea lună. Populaţia trece de la 8 la 13 iepuri, deci ea s-a înmulţit cu 13 : 8 = 1,625. Aşadar, ceea ce am obţinut nu este prea departe de numărul de aur, dar nici nu este exact numărul de aur. Dacă acum ne uităm la trecerea de la cea de-a unsprezecea la a douăsprezecea lună, populaţia s-a înmulţit cu 144 : 89 = 1,61797... Ne apropiem, deci! Şi am putea să continuăm tot aşa. Cu cât timpul trece, cu atât factorul de înmulţire de la o lună la alta se apropie de numărul de aur.
Odată ce am făcut această constatare, vine momentul întrebărilor. De ce? Cum se face că acest număr aparent inofensiv este prezent în trei domenii distincte ale matematicii: geometria, şirurile şi algebra? La început, ne-am putea gândi că nu este vorba decât de trei numere apropiate, dar diferite. însă nu este aşa: oricât de precis am măsura diagonala

Notaţia yj5 din această formulă reprezintă rădăcina pătrată a cifrei 5, adică numărul pozitiv al cărui pătrat este egal cu 5. Acest număr are valoarea aproximativă de 2,236. *(N.a.)*

unui pentagon, oricât de fin am calcula **(1+V5) : 2** şi oricât de departe am merge în cadrul şirului lui Fibonacci, trebuie să recunoaştem că de fiecare dată avem de-a face cu acelaşi număr. Pentru a răspunde la această întrebare, matematicienii sunt obligaţi să facă demonstraţii mixte care aruncă punţi între diferite ramuri ale matematicii. Acest fenomen, care exista deja între geometrie şi algebră, datorită reprezentărilor desenate ale numerelor, în Antichitate, se va propaga şi spre alte domenii matematice. Unele discipline care păreau până atunci îndepărtate unele faţă de altele încep să dialogheze. Numere precum *cp,* dincolo de interesul particular pe care îl stârnesc, se vor dovedi a fi extraordinari mediatori. Pe vremea lui Fibonacci, numărul **τ** îşi limita câmpul de acţiune doar la geometrie. Cu toate acestea, el va deveni în secolele ce vor urma campionul tuturor categoriilor acestor numere-punţi.

De asemenea, studiul şirurilor ne permite să aruncăm o nouă lumină asupra paradoxului lui Zenon din Elea şi, mai ales, asupra aceluia cu Ahile şi ţestoasa. Sper că vă mai aduceţi aminte de cursa imaginată de omul de ştiinţă grec: ţestoasa începe cursa cu o sută de metri înaintea lui Ahile, dar acesta din urmă aleargă de două ori mai repede. în această situaţie, paradoxul părea să ne arate că, în ciuda lentorii sale, ţestoasa nu ar putea fi niciodată depăşită.

Această concluzie reieşea din împărţirea cursei într-o infinitate de etape. în momentul în care Ahile atingea punctul de pornire al ţestoasei, aceasta avansase deja 50 de metri. în timp ce Ahile parcurge aceşti 50 de metri, ţestoasa mai înaintează 25 de metri şi aşa mai departe. Distanţele dintre cei doi alergători pe fiecare etapă formează un şir în care fiecare termen valorează jumătate din precedentul.
100 50 25 12,5 6,25 3,125 1,5625...

Şirul este infinit şi aceasta este raţiunea pentru care putem să deducem în mod fals că Ahile nu va ajunge
niciodată din urmă testoasa. Totuşi dacă adunăm această
//
infinitate de numere, se poate găsi un rezultat care nu este deloc infinit.
100 + 50 + 25 + 12,5 + 6,25 + 3,125 + 1,5625 + ... = 200.

Aceasta este una dintre marile curiozităţi ale şirurilor: adunarea unei infinităţi de numere poate să fie finită! Suma precedentă ne arată că Ahile va depăşi ţestoasa după 200 de metri de alergat.[I]

I Calculul sumei unei infinităţi de numere se face utilizând noţiunea de limită. Metoda constă în a trunchia suma, pentru a nu lua în considerare decât un număr finit de termeni. Apoi se adaugă din ce în ce mai mulţi termeni, pentru a vedea de care număr-limită se pot apropia aceste sume parţiale. în cazul lui Ahile şi al ţestoasei, dacă nu privim decât primii şapte termeni, vom găsi numărul aproximativ 199,9998. Este posibil să demonstrăm că,

Aceste adunări infinite se vor dovedi de o mare utilitate în calculul numerelor provenite din geometrie, precum acela al lui **ττ** sau ale raporturilor trigonometrice.
Dacă aceste numere nu sunt exprimabile cu ajutorul operaţiilor elementare clasice, este posibil să le obţinem prin însumarea şirurilor. Unul dintre primii care au explorat această posibilitate a fost matematicianul indian Madhava de Sangamagrama care a descoperit în jurul anului 1500 o formulă pentru numărul **ττ:**

= CM :1K) • (< (,')■(»)'

Termenii şirului lui Madhava sunt alternativ pozitivi şi negativi şi se obţin împărţindu-l pe 4 la numerele impare succesive. Totuşi nu trebuie să credem că această sumă rezolvă definitiv problema lui **ττ**. Odată adunarea realizată, trebuie să-i mai găsim şi rezultatul. Or, dacă anumite însumări de şiruri, precum în cazul Ahile şi ţestoasa, pot fi uşor de calculat, în schimb, altele opun rezistenţă mai mare, precum în cazul şirului lui Madhava.

Pe scurt, această sumă infinită nu ne permite întru totul să oferim o scriere zecimală exactă a lui **ττ**, ci deschide noi porţi pentru aproximări mai bune. Deoarece nu putem să adunăm dintr-odată o infinitate de termeni, ne putem totuşi mulţumi cu un număr finit de termeni pe care îi luăm în

adăugând din ce în ce mai mulţi termeni, ne apropiem extraordinar de mult de 200. Aşadar, suma infinită are valoarea de 200. *(N.a.)*

considerare. Astfel, păstrând doar primii cinci termeni, obţinem 3,34.

(rM-MM-O+G)—

Nu este o foarte bună aproximare, dar nu contează, mergem mai departe. Dacă luăm primii o sută de termeni, ajungem la 3,13, iar apoi, dacă luăm un milion de termeni, vom obţine 3,141592.

Cu siguranţă că nu este foarte practic să adunăm un milion de termeni pentru a obţine o aproximare de doar
sase zecimale. Şirul lui Madhava are hiba unei conver-
genţe foarte lente. Mai târziu, alţi matematicieni, precum elveţianul Leonhard Euler, în secolul al XVIII-lea, sau indianul Srinivas Ramanujan, în secolul XX, vor descoperi o mulţime de alte şiruri a căror sumă este egală cu n şi care se apropie de el mult mai repede. Aceste metode vor înlocui treptat metoda lui Arhimede şi vor permite calcularea a din ce în ce mai multor zecimale.

Rapoartele trigonometrice au şi ele şirurile lor. De exemplu, cele necesare calculării sumei pentru obţinerea cosinusului unui unghi dat.

unsihi^ tinsshi⁴ unu^ii''
l x 2 1 * 2 x * -l 1 * 2 x * \ * .t x ti

Pentru a găsi valoarea cosinusului este suficient să înlocuim cuvântul „unghi” printr-o măsură exactă a unui unghi anume[I]. Formule asemănătoare există pentru sinusuri, tangente, precum şi pentru o mulţime de alte numere particulare apărute în diferite contexte.

I Pentru ca formula să funcţioneze, trebuie să fim atenţi, căci unghiul nu trebuie să fie măsurat în grade, ci în radiani. Cu această nouă unitate, un cerc nu mai are 3 600, ci 2n radiani. Acest lucru poate părea straniu, dar cu această unitate funcţionează corect formulele trigonometrice, împreună cu şirurile care le sunt asociate. *(N.a.)*

10

Şirurile continuă să aibă astăzi o mulţime de aplicaţii. în şirul lui Fibonacci formulele sunt încă folosite în dinamica populaţiilor pentru studierea evoluţiei speciilor animale de-a lungul timpului. Modelele actuale sunt totuşi mult mai precise şi ţin cont de o multitudine de parametri, precum mortalitatea, prădătorii, climatul sau, în general, variabilitatea ecosistemelor în care trăiesc animalele. Mai bine spus, şirurile intervin în modelarea oricărui proces care evoluează etapă cu etapă de-a lungul timpului. Informatica, statistica, economia sau meteorologia sunt tot atâtea domenii care fac apel la şiruri.Lumile imaginare

începând cu secolul al XVI-lea, seminţele sădite de Fibonacci încep să dea roade, odată cu apariţia unei noi generaţii de matematicieni. Aceştia vor relua pe cont propriu cercetările algebrice începute de oamenii de ştiinţă arabi. Ei vor fi cei care în cele din urmă vor găsi soluţiile

ecuaţiilor de gradul III şi vor face acest lucru în urma unei întâmplări incredibile.

La începutul secolul al XVI-lea, această poveste va debuta cu un om de afaceri şi profesor de aritmetică de la Universitatea din Bologna, numit Scipione del Ferro. El e interesat de algebră şi este primul care a descoperit formulele de rezolvare a ecuaţiilor de gradul III. Dar din păcate, în această epocă, spiritul de difuzare a cunoştinţelor care circulau în lumea arabă nu se manifesta si în Europa. Universitatea din Bologna scotea locuri la concurs în mod regulat pentru diferitele posturi de profesori. Pentru a rămâne cel mai bun şi a-şi păstra locul, Del Ferro avea interesul ca adversarii lui să nu-i cunoască secretul. El şi-a scris descoperirea, dar nu a publicat-o, ci a arătat-o unui număr redus de discipoli care, ca şi el, i-au păstrat confidenţialitatea.

Când matematicianul bolognez a murit, în 1526, comunitatea matematică italiană habar nu avea că ecuaţiile de gradul III fuseseră rezolvate. Mulţi dintre ei continuau chiar să creadă că pur şi simplu nu puteau fi rezolvate. Totuşi unul dintre discipolii de încredere ai lui Del Ferro, Antonio Maria del Fiore, nu s-a putut abţine să nu vorbească. A început să lanseze provocări celorlalţi matematicieni din ţară, provocări care constau în principal în rezolvarea ecuaţiilor de gradul III. Bineînţeles că el câştiga de fiecare

dată. Zvonul existenţei unei soluţii a început treptat să se răspândească.

în 1535, un savant veneţian, Niccolo Fontana Tartaglia, a fost provocat de Del Fiore. Tartaglia avea pe atunci 35 de ani şi nu publicase încă lucrări ştiinţifice importante. Del Fiore nu ştia, deci, că se adresa celui care va deveni unul dintre cei mai buni matematicieni ai generaţiei sale. Cei
doi oameni de stiintă si-au adresat unul altuia o listă de
//:
treizeci de întrebări pentru o mizăde treizeci de banchete oferite de învins pentru învingător. De-a lungul mai multor săptămâni, Tartaglia şi-a bătut capul cu ecuaţiile de gradul III trimise de Del Fiore şi doar cu câteva zile înainte de data-limită a reuşit la rândul său să găsească formulele. Apoi nu i-au mai trebuit decât câteva ore să rezolve cele treizeci de ecuaţii şi să răspundă astfel provocării.

Povestea s-ar fi putut opri aici, doar că Tartaglia a refuzat la rândul său să-şi prezinte metoda publicului, iar situaţia a rămas aşa încă patru ani.

în momentul acesta povestea a ajuns la urechile unui matematician şi inginer din Milano, numit Girolamo Cardano. Fără îndoială că numele lui franţuzit de Jérôme Cardan va suna cunoscut în urechile amatorilor de mecanică; el este, printre altele, inventatorul arborelui

cardanic, cel care la maşinile noastre transmite rotatia
' t t
motorului până la roţi. Până în acel moment Cardano făcea parte dintre cei care credeau că rezolvarea ecuaţiilor de gradul III este imposibilă. Intrigat de provocarea câştigată de Tartaglia, el va încerca să se apropie de acesta din urmă. La începutul lui 1539 i-a trimis opt probleme pentru a fi rezolvate şi i-a cerut să-i transmită metoda sa de lucru. Tartaglia va refuza în mod categoric să facă acest lucru. Omul de ştiinţă milanez s-a supărat şi atunci a încercat o manevră de intimidare, apelând la grupul de algebrişti din ţară ca să sancţioneze aroganţa colegului lor, dar Tartaglia nu a cedat.

Până la urmă, Cardano şi-a atins scopul printr-un şiretlic. L-a făcut pe Tartaglia să creadă că marchizul de Alvaos, guvernatorul oraşului Milano, dorea să-l întâlnească. Aflat la Veneţia, Tartaglia se găsea în perioada respectivă într-o situaţie precară şi avea nevoie de un protector. El a acceptat să meargă la Milano, unde întrevederea era prevăzută pentru data de 15 martie 1539, chiar în casa lui Cardano. Tartaglia l-a aşteptat degeaba pe guvernator, timp de trei zile. Această perioadă a fost suficientă pentru Cardano să-şi ducă până la capăt planul malefic. în urma unor negocieri neobosite, Tartaglia va ceda, cu condiţia ca Girolamo Cardano să jure că

nu-i va publica niciodată metoda. Odată jurămintele făcute, formulele au fost dezvăluite.

Cardano a început să disece formulele. Metoda funcţiona de minune, dar îi lipsea un lucru — demonstraţia. Până atunci, niciun matematician implicat în rezolvarea acestor ecuaţii nu reuşise să dovedească, în mod riguros, că formulele funcţionează perfect în toate cazurile. Cardano s-a înhămat la această sarcină pentru anii care au urmat. El a reuşit să le demonstreze, iar unul dintre elevii săi, Ludovico Ferrari, a reuşit chiar să generalizeze metoda şi pentru ecuaţiile de gradul IV. Dar, constrânşi de jurământul de la Milano, cei doi matematicieni nu-şi puteau publica rezultatele.

Totuşi Cardano nu va renunţa la această idee. în 1542 el merge la Bologna împreună cu Ferrari pentru a-l întâlni pe Hannibale della Nave, un alt vechi discipol al lui Scipione del Ferro. în trei, ei au reuşit să pună mâna pe vechile notiţe ale acestuia din urmă şi au constatat că Scipione a fost primul care a găsit formulele. Din acel moment Cardano s-a considerat eliberat de jurământul său. în 1547 el va publica *Ars Magna* sau *Marea artă,* o lucrare care va arăta lumii metoda de rezolvare a ecuaţiilor de gradul III. Furios, Tartaglia îl va insulta violent pe Cardano şi îşi va publica propria versiune a întâmplării. Prea târziu! Cardano a devenit în ochii lumii cel care a învins ecuaţiile de gradul III, iar astăzi

metoda este cunoscută sub numele de formula lui Cardan.

Câteva detalii din *Ars Magna* vor trezi totuşi un anumit scepticism în rândurile algebriştilor epocii. în mai multe cazuri, formulele lui Cardan par să aibă nevoie de calculul rădăcinilor pătrate ale numerelor negative. De exemplu, în rezolvarea unor ecuaţii, poate să apară rădăcina pătrată a lui -15, care prin definiţie trebuie să fie un număr al cărui pătrat să aibă valoarea -15. Dar acest lucru este absolut imposibil, în virtutea regulii semnelor consacrate. Pătratul unui număr pozitiv este pozitiv, iar pătratul unui număr negativ este, de asemenea, pozitiv. De exemplu, (-2) 2 = (-2) x (-2) = 4. Niciun număr înmulţit cu el însuşi nu poate să dea -15. Pe scurt, rădăcinile pătrate care apar în calculul acestor soluţii pur şi simplu nu există. Da, numai că, utilizând aceste numere inexistente ca etape intermediare, metoda lui Cardan ajunge totuşi să găsească un rezultat corect. Acest lucru este uimitor si straniu.

Un alt matematician din Bologna, Rafael Bombelli, se va apleca asupra acestei probleme şi va sugera că rădăcinile pătrate ale cantităţilor negative ar putea foarte bine să reprezinte o nouă specie de numere. Adică acestea să nu fie nici pozitive, nici negative. Este vorba despre numere care au o natură ciudată şi inedită şi nimic până astăzi nu ar fi făcut să le bănuim existenţa. După apariţia lui zero şi a numerelor

negative, marea familie a numerelor se găseşte din nou pe punctul de a se mări.

Spre sfârşitul vieţii, Bombelli va scrie opera sa majoră, *Algebra Opera*, pe care o va publica în anul morţii sale, în 1572. El reia aici descoperirile din *Ars Magna* şi introduce aceste noi specimene pe care le numeşte „numere sofisticate”. Bombelli va face pentru ele ceea ce Brahmagupta a făcut cu numerele negative pe vremea sa. El realizează un ansamblu de reguli de calcul care pun în ordine numerele sofisticate şi care conduc în mod exact spre acceptarea faptului că se pot obţine numere negative prin ridicarea la pătrat.

Numerele sofisticate ale lui Bombelli au un destin asemănător cu acela al numerelor negative. Şi acestea vor da naştere unui lot de matematicieni sceptici şi increduli.
Totuşi şi ele vor ajunge să se impună cu putere şi să revoluţioneze lumea matematicii. Printre scepticii convertiţi, îl regăsim la începutul secolului al XVII-lea pe matematicianul şi filosoful francez René Descartes, care va da acestor numere nou-sosite numele sub care le cunoaştem şi astăzi: „numere imaginare”.

Va fi nevoie să treacă încă două secole până ca numerele imaginare să fie pe deplin acceptate de întreaga comunitate matematică. De acum încolo, ele vor fi de neocolit în ştiinţa modernă. Dincolo de ecuaţii, aceste numere îşi vor găsi numeroase aplicaţii în ştiinţele naturii, mai exact

în studiul tuturor fenomenelor ondulatorii pe care le întâlnim, de exemplu, în electronică sau în fizica cuantică. Fără acestea, multe inovaţii tehnologice moderne nu ar fi fost posibile.

Totuşi, contrar numerelor negative, cele imaginare rămân necunoscute pentru foarte mulţi din afara cercurilor ştiinţifice. Ele sunt contraintuitive, dificil de conceput şi nu reprezintă fenomenele fizice simple. Dacă numerele negative puteau încă să fie înţelese ca nişte datorii sau ca lipsuri, cu numerele imaginare trebuie să renunţăm definitiv la a mai gândi numerele ca pe nişte cantităţi. Este imposibil să le dăm un sens aplicabil în viaţa de zi cu zi şi să numărăm cu ele mere sau oi.

Numerele imaginare vor contribui treptat la debarasarea matematicienilor de ultimele complexe. înainte de toate, dacă este suficient să acceptăm existenţa rădăcinilor pătrate negative pentru a crea o nouă specie de numere, de ce nu am putea să mergem şi mai departe? Nu ar fi posibil să adăugăm după bunul plac noi numere, cu condiţia de a preciza proprietăţile lor aritmetice? Nu am putea, oare, să inventăm chiar noi structuri algebrice, total independente de numerele clasice?

în secolul al XlX-lea au fost abolite până şi ultimele idei *a priori* care mai existau în legătură cu ceea ce sunt numerele. De acum încolo, o structură algebrică devine o simplă construcţie matematică alcătuită din elemente (care pot fi

numite numere în anumite contexte, dar nu întotdeauna) şi operaţii pe care le putem face cu aceste elemente (pe care le putem numi adunare, înmulţire etc. în anumite contexte, dar nu întotdeauna).

Această nouă libertate va da naştere unei formidabile explozii creatoare. Noi structuri algebrice, mai mult sau mai puţin abstracte, sunt descoperite, studiate şi clasificate. în faţa acestei ample acţiuni, matematicienii europeni şi apoi ai lumii întregi se organizează, fac schimburi de idei şi colaborează. Chiar şi astăzi numeroase cercetări algebrice continuă să fie realizate în întreaga lume şi numeroase conjecturi aşteaptă să fie demonstrate.

Inventaţi-vă propria teorie matematică!

Visaţi cumva să aveţi o teoremă care să vă poarte numele, precum în cazul lui Pitagora, Brahmagupta sau Al Kashi? Ei bine, vă propun acum să creaţi şi să studiaţi propria dumneavoastră structură algebrică. Pentru acest lucru aveţi nevoie de două ingrediente: o listă de elemente şi o operaţie care să permită compunerea acestora.

De exemplu, să luăm opt elemente, pe care le vom nota cu simbolurile următoare: V, ♦, 4, *X,* J3, ▲ şi Mai avem nevoie de încă un semn pentru operaţia noastră, iar pentru acest lucru să-l luăm, de exemplu, pe iar ca omagiu adus savantului italian, o vom numi „operaţia de bombelliaţie”.

Pentru a determina rezultatul bombelliaţiei a două elemente, trebuie acum să stabilim un tabel al acestei operaţii. Să desenăm un tabel de opt linii şi opt coloane corespunzătoare celor opt elemente şi să le umplem după bunul plac, punând fiecare element în fiecare căsuţă.

	♦	∗	∗		J]	▲	
¥		*î*	∗	*T*	*A*	J]	¥	¥
	♦	♦	3	∗	∗		¥	♦
∗	♦	J]	∗	∗		¥		∗
∗	∗	*î*	▲	∗	∗	♦	▲	∗
T	¥	A	J3	¥	J”	J3		J[1]
J3	*A*	¥	*$*	∗	♦	J]		i]
A		*A*		♦	J[1]	♦	▲	▲
▲	-0-							
∗	¥	♦	*X*	∗	*T*	J]		

Iată că teoria dumneavoastră este gata; nu ne mai rămâne decât să o studiem. Dacă privim la cea de-a doua linie şi la cea de-a patra coloană, vom putea observa, de exemplu, că dacă

bombellizăm ♦ cu 4 se obţine Altfel spus = în teoria dumneavoastră veţi putea să rezolvaţi chiar şi ecuaţii. Iată una dintre acestea:
Găsiţi un număr care să dea J3 dacă se bombellizează cu
Pentru a găsi eventualele soluţii, este suficient să aruncăm o privire în tabelul nostru. Vom constata că există două soluţii: ♦ şi *X,* căci = J3 şi f^* = J3. Trebuie totuşi să avem grijă, căci în noua noastră teorie unele proprietăţi cu care suntem obişnuiţi pot să devină false. De exemplu, rezultatul poate să nu fie acelaşi, conform ordinii în care se bombellizează două elemente: = «T, în timp ce ♦ = Se spune în cazul acesta că operaţia nu este comutativă.
Cu un pic de atenţie aţi putea totuşi să descoperiţi câteva proprietăţi cu un grad mai mare de generalitate. De exemplu, bombellizând un element cu el însuşi dăm întotdeauna peste el: = V,
♦ = şi aşa mai departe. Acest rezultat merită în totalitate titlul de primă teoremă a teoriei noastre.
Pe scurt, aţi înţeles principiul! Dacă doriţi să realizaţi propriile teoreme, atunci nimic nu vă opreşte. Bineînţeles că puteţi să luaţi oricât de multe elemente doriţi, chiar şi o infinitate, dacă acest lucru vă tentează. Puteţi să definiţi aceste notaţii mai complex, aşa cum este cazul pentru numereleîntregi care nu au fiecare propriul simbol, ci se scriu cu ajutorul celor zece cifre

indiene. Apoi aţi putea să-i adăugaţi regulile de calcul care vor servi drept axiome ale teoriei dumneavoastră. De exemplu, este posibil să anunţaţi în definirea structurii algebrice care vă aparţine că operaţia este comutativă.
Nu trebuie totuşi să ne minţim, căci procedând astfel aveţi puţine şanse ca teoria dumneavoastră să rămână posterităţii. Nu toate modelele matematice sunt egale! Unele sunt mai utile şi mai importante decât altele. Creând la întâmplare propriul tabel de operaţii, există posibilitatea ca acesta să fie neinteresant. Iar dacă nu a fost niciodată expus, ar exista totuşi şanse ca un alt matematician să-l fi studiat deja înaintea dumneavoastră, deoarece, ei bine, nu trebuie să exagerăm; a fi matematician este o meserie în sine!

Cum poate fi recunoscută o teorie interesantă? De-a lungul istoriei au existat, în principal, două criterii care i-au ghidat pe matematicieni în explorările lor. Primul este utilitatea, iar al doilea este frumuseţea.

Utilitatea este fără îndoială cel mai evident element. Raţiunea primă a matematicii constă în a găsi lucruri care să servească la ceva. Numerele sunt utile, căci permit să numărăm şi să facem comerţ, geometria ne permite să măsurăm lumea, iar algebra ne ajută să rezolvăm problemele vieţii cotidiene.

în ceea ce priveşte frumuseţea, ea poate părea un criteriu mai imprecis şi mai puţin

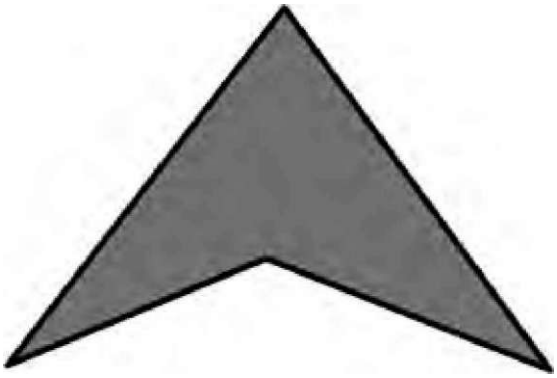
obiectiv. Cum e posibil ca o teorie matematică să fie frumoasă? Am putea să înţelegem acest lucru în cazul geometriei, unde anumite figuri pot fi apreciate vizual, precum nişte opere de artă. în situaţia aceasta se află frizele mesopotamiene, solidele lui Platon sau pavajele din Alhambra. Dar în algebră? O structură algebrică poate fi cu adevărat frumoasă?

Mult timp am crezut că privilegiul de a fi atins de eleganţa sau de poezia obiectelor matematice era destinat specialiştilor sau unor amatori norocoşi, adică celor care au petrecut suficient de mult timp studiind, disecând şi digerând teoriile până în detaliu. Sau celor care au dezvoltat cu ajutorul conceptelor abstracte o intimitate strânsă şi profundă pe care doar ei o puteau simţi. Nu aveam dreptate şi am avut ocazia de nenumărate ori să constat că eleganţa matematicii poate fi sesizată şi de neofiţi, ba chiar şi de copiii foarte mici.

Unul dintre exemplele cele mai izbitoare mi s-a revelat într-o zi în care animam atelierul de cercetare împreună cu clasa a doua de la o şcoală. Copiii, în jur de 7 ani, aveau ca sarcină să lucreze cu triunghiuri, pătrate, dreptunghiuri, pentagoane, hexagoane şi multe alte forme, pe care trebuiau să le trieze conform unor criterii liber alese. S-a observat că pentru fiecare dintre aceste figuri putem să numărăm câte laturi şi câte vârfuri există. Triunghiurile au 3 laturi şi 3 vârfuri, pătratele sau dreptunghiurile au 4 laturi

şi 4 vârfuri şi aşa mai departe. Realizând această listă, copiii au formulat rapid o teoremă. Un poligon are întotdeauna tot atâtea laturi câte vârfuri.

Săptămâna următoare, pentru a-i provoca, am adus în discuţie figurile neregulate, dintre care una avea forma următoare:



Se pune, aşadar, întrebarea: câte laturi şi câte vârfuri există aici? Şi iată că majoritatea clasei răspunde: 4 laturi şi 3 vârfuri. Acest unghi inversat din josul figurii nu are o formă de vârf, adică nu este ascuţit. Nu se poate rostogoli figura peste el. Este mai degrabă o scobitură decât o umflătură a figurii. Pe scurt, acest unghi care intră în figură nu făcea parte din ideea prealabilă pe care copiii şi-o făcuseră despre ce este acela un vârf. Dacă le-aş fi cerut să numească acest punct „vârf” ar fi însemnat că le cer să dea acelaşi nume unor lucruri diferite. Ce idee stranie! Discuţiile s-au încins. Niciun copil nu este de acord cu statutul acestui nou punct. Ar

trebui să-i dăm, oare, un alt nume, ar trebui să-l ignorăm complet? Există argumente pro şi contra, dar, în general, niciunul nu părea să convingă pe majoritatea dintre ei.

Apoi, dintr-odată, un copil şi-a adus aminte de teoremă. Dacă acesta nu este un vârf, nu mai putem spune că orice poligon are tot atâtea laturi câte vârfuri. Spre marea mea uimire, acest argument a fost cel care într-o clipă a făcut ca întreaga clasă să-şi schimbe părerea. în câteva secunde toată lumea era de acord: trebuia ca acest punct să capete numele de vârf. Trebuia să fie salvată teorema, chiar cu preţul prejudecăţilor noastre. Ar fi fost păcat ca acest enunţ atât de simplu şi limpede să fi avut excepţii. Iată cea mai precoce manifestare a eleganţei matematicii la care am putut fi martor.

„Excepţiile” nu sunt frumoase. Ele ne rănesc sentimentele. Cu cât un enunţ este mai simplu şi aplicabilitatea sa mai mare, cu atât ne dă impresia că putem să atingem cu degetul ceva cu adevărat profund. Frumuseţea în matematică poate căpăta diverse forme, care se manifestă prin acest raport tulburător al complexităţii obiectelor studiate cu ajutorul formulărilor cât mai simple. O teorie frumoasă este o teorie economă, fără resturi, fără excepţii arbitrare şi deosebiri inutile. Este o teorie care spune multe cu puţine vorbe, care fixează esenţialul în câteva cuvinte, care merge direct la ţintă.

Dacă exemplul poligoanelor rămâne elementar, această impresie de eleganţă nu face nimic altceva decât să crească, pe măsură ce teoriile se dezvoltă, păstrând în acelaşi timp o ordine care se reduce la câteva reguli simple. Este tulburător când o nouă teorie, pe care am putea s-o gândim într-un mod mai complex decât pe una veche, se dovedeşte, în realitate, a fi mult mai precisă şi armonioasă. Numerele imaginare reprezintă o astfel de ilustrare perfectă.

Să ne aducem aminte de ecuaţiile de gradul II: conform metodei lui al-Khw rizm , se putea ca aceste ecuaţii să aibă două soluţii. Dar se putea, în egală măsură, ca acestea să nu aibă decât una singură sau chiar nicio soluţie. Acest lucru este valabil dacă luăm în considerare numai soluţii care nu implică numere imaginare. Dacă se ţine cont de acestea din urmă, regula se simplifică în mod considerabil: toate ecuaţiile de gradul II au două soluţii. Atunci când al-Khw rizm pretindea că o ecuaţie nu avea soluţie, spunea acest lucru deoarece era pur şi simplu blocat într-un ansamblu prea restrâns de numere. Dar cele două soluţii erau imaginare.

Mai mult decât atât, datorită acestor numere imaginare, toate ecuaţiile de gradul III au trei soluţii, cele de gradul IV au patru soluţii şi aşa mai departe. Pe scurt, regula este următoarea: o ecuaţie are tot atâtea soluţii câte indică gradul său. Acest rezultat a fost conjecturat în secolul al XVIII-lea, înainte de a fi demonstrat la începutul

secolului al XlX-lea de matematicianul german Cari Friedrich Gauss. Se numeşte astăzi teorema fundamentală a algebrei.

După mai mult de o mie de ani de la tratatul lui al-Khw rizm , după toate piedicile puse de ecuaţiile de gradul III, după dificultăţile conceperii ecuaţiilor de mai mult de gradul IV fără a recurge la o reprezentare geometrică, cine ar fi putut să creadă că totul se va sfârşi prin- tr-o simplă regulă alcătuită din zece cuvinte? O ecuaţie are tot atâtea soluţii câte indică gradul său.

Iată minunea numerelor imaginare! Şi ecuaţiile nu sunt singurele care profită de acestea. în lumea imaginară, multe teoreme se enunţă brusc, cu o concizie şi o eleganţă care ne taie răsuflarea. Toate piesele puzzle-ului matema- tic par să se îmbine de minune. Probabil că Bombelli nu se îndoia de faptul că prin legitimarea numerelor sale „sofisticate” deschidea timid poarta unui adevărat paradis pentru generaţii întregi de matematicieni.

Matematicienii caută acest gen de proprietăţi şi în cadrul structurilor algebrice care vor lua naştere în secolul al XlX-lea. Este vorba despre reguli generale, simetrii, analogii, rezultate care se înlănţuie şi se completează perfect. Mica teorie pe care am inventat-o mai sus este foarte departe de respectarea acestor criterii pentru a deveni interesantă. Ea este perfect aleatorie şi absolut totul în cadrul său este doar un caz

particular. Nu există reguli generale asupra ecuaţiilor, nici asupra proprietăţilor operaţiilor lor. Păcat! /

Unul dintre marile nume din algebra modernă este acela al francezului Evariste Galois, un geniu precoce care a murit la vârsta de 21 ani, în 1832, în urma unui duel, şi care, în scurta sa existenţă, şi-a găsit totuşi timp pentru a pune o piatră la edificiul istoriei ecuaţiilor. Galois a reuşit să dovedească faptul că dincolo de gradul V soluţiile anumitor ecuaţii nu mai puteau fi calculate cu ajutorul formulelor similare cu cele ale lui al-Khw rizm sau cele ale lui Cardan, care nu utilizau decât cele patru operaţii, plus ridicarea la putere şi radicalii. Pentru a ajunge la demonstraţia sa extraordinară, el a creat noi structuri algebrice care continuă să fie studiate şi azi sub numele de grupuri Galois.

Dar cea mai prolifică în arta de a deduce rezultate algebrice pornind de la un număr restrâns de axiome, este matematiciana germană Emmy Noether. Din 1907 până la moartea sa, în 1935, Noether a publicat aproape cincizeci de articole de algebră, dintre care unele vor re-voluţiona disciplina prin alegerea structurilor algebrice şi ale teoremelor pe care le-a dedus. Ea a studiat în principal ceea ce azi numim inele, corpuri şi algebre[1], adică structuri care posedă trei, patru şi respectiv cinci operaţii legate între ele prin proprietăţi bine determinate.

Cu acest pas, putem spune că algebra a intrat în sfera abstracţiilor atât de înalte, încât modesta carte pe care o aveţi în mână trebuie să cedeze locul cursurilor universitare şi lucrărilor academice.

Cuvântul „algebră” semnifică totodată disciplina ca întreg, dar şi un tip particular de structură algebrică. *(N.a.*

10

Un limbaj pentru matematică

Europa fierbea în secolul al XVI-lea. Renaşterea a depăşit graniţele Italiei şi a inundat întregul continent. Invenţiile se ţin lanţ, iar descoperirile sporesc. La vest, dincolo de Atlantic, vasele spaniole descoperă o nouă lume, iar în timp ce exploratorii se îndreaptă spre aceste noi teritorii din ce în ce mai numeroase, în căutare de ţinuturi îndepărtate, intelectualii umanişti, în bibliotecile lor, se întorc în timp şi redescoperă marile texte ale Antichităţii. Tradiţiile sunt bulversate până şi pe plan religios. Reforma protestantă, aflată sub conducerea lui Martin Luther şi a lui Jean Calvin, cunoaşte un succes răsunător, iar războaiele religioase se vor răspândi în a doua jumătate a secolului.

Propagarea acestor idei novatoare este susţinută în mod deosebit prin apariţia unei noi invenţii puse la punct în 1450 de către germanul Johannes Gutenberg: tiparul cu caractere mobile. Datorită acestui procedeu, acum este posibil să fie imprimate foarte repede numeroase exemplare ale unei cărţi şi să fie difuzate la scară largă. începând cu 1482, *Elementele* lui Euclid a fost prima lucrare matematică ieşită din tipar la Veneţia. Procedeul cunoaşte un succes fulminant! La începutul secolului al XVI-lea, mai multe sute de oraşe deţineau propria tiparniţă şi zeci de mii de lucrări erau deja tipărite.

Ştiinţele devin o parte activă în cadrul acestor procese bulversante. în 1543, astronomul polonez Nicolas Copernic publică *De Revolutionibus Orbium Coelestium (Despre revoluţiile sferelor celeste).* Cartea a constituit o lovitură de graţie. Cu o singură mişcare, a reuşit să mătură întregul sistem astronomic al lui Ptolemeu, el afirmând că Pământul este cel care se învârte în jurul Soarelui şi nu invers. în anii care au urmat, Giordano Bruno, Johannes Kepler sau Galileo Galilei îi vor călca pe urme, impunând heliocentrismul ca nou model cosmologic de referinţă. Această revoluţie nu va duce lipsă de savanţi care vor fi atraşi de ea, stârnind fulgerele Bisericii Catolice care, după o perioadă în care a încurajat dezvoltarea ştiinţelor, se va găsi într-o postură nefavorabilă în momentul în care dogmele încep să fie respinse. Dacă Nicolas Copernic a avut prezenţa de spirit să nu-şi publice lucrările decât cu puţin timp înaintea morţii, în schimb, Bruno a fost ars pe rug în piaţa publică la Roma, iar Galilei a fost constrâns să-şi renege lucrările în faţa tribunalului Inchiziţiei. Legenda spune că, ieşind din sala de proces, omul de ştiinţă italian a murmurat aceste patru cuvinte devenite celebre: *E pur si muovel* Şi totuşi se învârte!

Matematica urmează această mişcare culturală şi va ajunge treptat în marile regate ale vestului european, în special în Franţa.

Desigur, matematica mai fusese practicată pe teritoriul francez înainte de această perioadă.

Galii aveau propriul sistem de numerotare, în baza douăzeci, din care mai păstrăm până astăzi denumirea pe care o dăm numărului 80[1]. Romanii au ocupat Galia cu toate că nu erau mari matematicieni, dar mânuiau suficient de bine cifrele pentru a administra în mod eficient imensul lor imperiu. La fel au stat lucrurile şi cu francii, merovinginenii, carolingienii şi capeţienii care s-au succedat unii după alţii de-a lungul Evului Mediu. Până acum niciodată Franţa nu a avut matematicieni de prim rang. Niciodată până în acest moment nu s-au descoperit pe teritoriul Hexagonului teoreme sau rezultate importante care să nu fi fost deja descoperite în alte părţi ale lumii.

Deoarece matematica a debarcat în Franţa, avem ocazia să plecăm la drum. Direcţia: Vendée. în vestul ţării mă întâlnesc astăzi cu primul mare matematician francez al Renaşterii: François Viète. Satul Foussais- Payré, aflat la doisprezece kilometri de Fontenay-le- Comte, este încărcat de istorie. Primele urme de ocupaţie ale sitului datează din epoca galo-romană, dar numai începând cu Renaşterea localitatea va cunoaşte o perioadă de mare prosperitate. Artizanii şi negustorii vin aici în număr foarte mare ca să-şi dezvolte afacerile înfloritoare. Se face comerţ cu lână, in şi piei, care conduce la un renume ce se răspândeşte în cele patru colţuri ale regatului. Chiar şi astăzi puteţi observa numeroase edificii ce datează din acele vremuri si care s-au

conservat în mod remarcabil. Cu aproximativ o mie de locuitori, satul are nu mai puţin de patru construcţii considerate monumente istorice, precum şi numeroase alte clădiri vechi.

în nordul satului întâlnim asa-numitul loc La Bigotière, adică vechea fermă pe care François Viète a mostenit-o de la tatăl său si care i-a adus titlul de Seigneur de La Bigotière. Pe strada centrală se găseşte hanul Sainte-Catherine, adică vechea proprietate a familiei în care Viète adora să-şi petreacă timpul în adolescenţă. Pentru mine este foarte emoţionant să merg printre aceste ziduri care l-au văzut crescând pe primul mare matematician al Franţei. Fără îndoială că tânărul François şi-a petrecut multe seri de iarnă într-un colţ lângă acest imens şemineu care tronează în mijlocul sălii principale, astăzi transformată într-o sală de restaurant. Oare la căldura acestui foc au luat naştere primele idei ale gândirii sale matematice?

Francezii spun la 80 „quatre-vingts” (20 de 4 ori). *(N.t.)*

Viète nu va rămâne toată viaţa la Foussais-Payré. După ce a studiat Dreptul la Poitiers, el a călătorit la Lyon unde a fost prezentat regelui Charles IX, apoi a petrecut câtva timp în La Rochelle înainte de a pleca să se stabilească la Paris.

Războaiele religioase atingeau apogeul în acea perioadă. Chiar şi în familia lui François s-a

produs o separare cu privire la problema religioasă: tatăl său, Étienne Viète, se convertise la protestantism, în timp ce doi unchi de-ai săi au rămas catolici. François rămâne indiferent la aceste dezbateri si nu-si va dezvălui niciodată convin-
t >gerile profunde. A fost, pe rând, avocat al marilor familii protestante, precum şi mare demnitar al regatului. Aceste tatonări au făcut să nu fie mereu văzut cu ochi buni şi de aceea a trecut de mai multe ori prin perioade de dizgraţie, în timpul nopţii de Sfântul Bartolomeu[I], în 1572, el se află la Paris, dar izbuteşte să scape de masacru. Nu toţi au avut norocul lui. Pierre de La Ramée, primul care a introdus matematica la Universitatea de la Paris şi ale cărui lucrări au avut o influenţă imensă asupra lui Viète, a fost asasinat pe 26 august.

în paralel cu sarcinile oficiale, Viète practică matematica, însă cu titlu de amator. El îi cunoaşte bine pe Euclid, Arhimede şi pe oamenii de ştiinţă ai Antichităţii pe care Renaşterea îi redescoperă. Se interesează totodată şi de oamenii de ştiinţă italieni şi este unul dintre primii care au citit *Algebra Opera* a lui Bombelli, a cărei publicare trecuse aproape neobservată în vremea aceea. Matematicianul francez se va poziţiona

I Masacru comis asupra protestanţilor din Franţa, declanşat de puterea de stat în noaptea dintre 23 şi 24 august 1572 şi soldat cu moartea a aproape 30 000 de hughenoţi. *(N.r.)*

totuşi de partea dubitativilor în ceea ce priveşte introducerea numerelor sofisticate. De-a lungul întregii sale vieţi, Viète îşi va publica operele matematice pe propria-i cheltuială şi le va oferi doar celor pe care el îi consideră demni de a le citi. Este interesat de astronomie, trigonometrie sau criptografie.
în 1591, Viète va publica ceea ce va deveni opera sa principală: *În artem analyticem isagoge (Introducere în arta analitică)* adesea cunoscută sub numele de *Isagoge.* în mod ciudat, lucrarea va fi cunoscută nu pentru teoremele sau demonstraţiile sale matematice, ci pentru modalitatea în care sunt formulate rezultatele. Viète va fi principalul susţinător al noii algebre care va conduce la naşterea unui limbaj matematic cu totul nou, în doar câteva decenii.

Pentru a înţelege demersul său, trebuie să ne întoarcem la lucrările matematice ale vremurilor de dinainte. Dacă teoremele geometrice ale lui Euclid sau metodele algebrice ale lui al-Khw rizm sunt foarte utile şi azi, modalitatea în care acestea sunt prezentate s-a schimbat în mod radical. Oamenii de ştiinţă din vechime nu deţineau limbajul specific pentru a scrie matematica. Toate simbolurile care ne sunt atât de familiare astăzi, precum cele utilizate pentru desemnarea celor patru operaţii elementare, +, -, x şi :, au fost inventate abia în Renaştere. De-a lungul a aproape cinci mii de ani, plecând de la

mesopotamieni spre arabi şi ajungând la greci, chinezi şi indieni, formulele matematice s-au cuibărit în vocabularul curent al limbilor în care acestea au fost scrise.

Astfel, cărţile lui al-Khw rizm şi ale algebriştilor din Bagdad sunt scrise în întregime în limba arabă, nefolosind niciun simbolism. în aceste lucrări, unele raţiona-
' t
mente puteau aşadar să se întindă pe mai multe pagini, în timp ce în zilele noastre ar fi nevoie de doar câteva rânduri pentru a exprima acelaşi lucru. Să ne aducem aminte de ecuaţia de gradul II prezentată în al său *Al-fabr:*
Pătratul unui număr plus douăzeci şi unu este egal cu de zece ori acest număr.

Iată modalitatea în care al-Khw rizm îşi detaliază rezolvarea:
Pătratele şi Numerele sunt egale cu Rădăcinile; de exemplu, „Un pătrat şi douăzeci şi unu în numere sunt egale cu zece rădăcini ale aceluiaşi pătratAltfel spus, care trebuie să fie cantitatea unui pătrat care atunci când douăzeci şi unu de drahme îi sunt adăugate devine egal cu echivalentul a zece rădăcini ale acestui pătrat? Soluţia: luaţi jumătate din numărul de rădăcini; jumătatea este cinci. înmulţiţi-o cu ea însăşi; produsul este douăzeci si cinci. Luaţi din acesta douăzeci /
şi unu, care este asociat cu pătratul; restul este patru. Extrageţi-i rădăcina; va fi doi. Scădeţi-o pe aceasta din jumătatea de rădăcini, care este

cinci, şi rămâne trei. Aceasta este rădăcina pătratului pe care o căutaţi, iar pătratul este nouă. Aţi putea, de asemenea, să adăugaţi rădăcina la jumătate din rădăcini. Suma este şapte; aceasta este rădăcina pătratului pe care o căutaţi, iar pătratul însuşi are valoarea patruzeci şi nouă.

Un asemenea text este destul de greu de citit astăzi, chiar şi pentru studioşii care stăpânesc perfect metoda despre care este vorba. Rezolvarea ne conduce la două soluţii: 9 şi 49.

Algebra retorică, aşa cum se va numi mai târziu, nu numai că are o exprimare lungă, dar suferă şi de anumite ambiguităţi ale limbii, care pot da unei fraze mai multe interpretări. Odată cu creşterea complexităţii raţionamentelor şi demonstraţiilor, acest mod de a scrie se va dovedi, progresiv, greu de mânuit.

La aceste dificultăţi se adună câteodată şi cele pe care matematicienii şi le adaugă lor înşişi. Astfel, se găsesc în mod regulat matematici scrise în versuri. Adesea, acesta este un fenomen rezidual al unei tradiţii orale, în care învăţarea pe de rost era uşurată de forma poetică. Atunci când Tartaglia i-a transmis metoda de rezolvare a ecuaţiilor de gradul III lui Cardano, el a redactat-o în italiană şi în vers alexandrin! Evident că demonstraţia pierde din claritate ceea ce câştigă în poeticitate şi se poate bănui în mod legitim că Tartaglia, căruia îi ştim reticenţa în a-şi divulga

demonstraţia, a îngreunat înţelegerea în mod voit. Iată un extras tradus în română:

Când cubul si lucrurile /
Se găsesc egale în număr
Caută două alte numere care diferă de acesta.
Apoi, aşa cum se obişnuieşte,
Ca produsul lor să fie egal
Cu cubul treimii lucrului.
După aceea, în rezultatul general,
Din rădăcinile lor cubice bine scăzute,
Vei obţine lucrul pe care îl cauţi.

Cam obscur, nu-i aşa? Ceea ce Tartaglia numeşte „lucru" reprezintă numărul căutat, necunoscuta. Prezenţa cuburilor în acest text ne arată că avem de-a face cu ecuaţiile de gradul III. însuşi Cardano, odată ajuns în posesia poemului, se va confrunta cu cele mai mari greutăţi pentru a-l descifra.

Pentru a face faţă acestei complexităţi mereu crescânde, matematicienii vor începe puţin câte puţin să simplifice limbajul algebric. Acest proces începe în occidentul musulman în ultimele secole ale Evului Mediu, dar mişcarea va căpăta o cu totul altă amploare, mai ales în Europa dintre secolele al XV-lea şi al XVI-lea.

într-un prim moment şi-au făcut apariţia noile cuvinte specifice matematicii. Astfel, matematicianul galez Robert Recorde va propune la mijlocul secolului al XVI-lea o nomenclatură pentru anumitele puteri ale numărului necunoscut, bazat pe un sistem de prefixe care

puteau să înmulţească puterile oricât de mult s-ar fi dorit. De exemplu, pătratul necunoscutei este denumit *zenzike;* la puterea a şasea se spune *zenzicubik,* iar la puterea a opta se spune *zenzizenzizenzike.*

Apoi, treptat, încep să înflorească simbolurile noi pe care astăzi le considerăm atât de familiare pretutindeni şi în mod aleatoriu.

Spre 1460, germanul Johannes Widmann este primul care foloseşte semnele + şi - pentru a desemna adunarea şi scăderea. La începutul secolului al XVI-lea, Tartaglia, pe care îl cunoaştem deja, este unul dintre primii care au utilizat parantezele rotunde () în calculele sale. în 1557, englezul Robert Recorde foloseşte pentru prima oară semnul = pentru a desemna egalitatea. în 1608, olandezul Rudolph Snellius foloseşte o virgulă pentru a separa partea întreagă de partea zecimală a unui număr. în 1621, este rândul englezului Thomas Harriot să introducă semnele < > pentru a indica inferioritatea sau superioritatea a două numere.

în 1631, englezul William Oughtred utilizează „x” pentru a nota înmulţirea şi în 1647 devine primul care a utilizat litera grecească n pentru a desemna faimosul raport al lui Arhimede. Germanul Johann Rahn foloseşte pentru prima oară, în 1659, semnul pentru împărţire, în 1525 germanul Christoff Rudolff desemnează rădăcina pătrată prin semnul √, la care René Descartes adaugă în 1647 o bară orizontală: V~.

Bineînţeles că toate acestea nu se realizează într-o manieră liniară şi ordonată. De-a lungul acestei perioade, o mulţime de alte simboluri se nasc si mor. Unele nu sunt folosite decât o dată. Altele se dezvoltă şi îşi fac concurenţă. între prima utilizare a unui semn şi adoptarea sa definitivă de către un ansamblu al comunităţii matematice, adesea se scurg mai multe zeci de ani. Astfel, la un secol după introducerea lor, semnele + şi - nu erau încă adoptate definitiv şi mulţi matematicieni utilizau literele P şi M, iniţialele cuvintelor latineşti *plus* şi *minus,* pentru a desemna adunarea şi scăderea.

Ce caută Viète în toate acestea? Omul de stiintă francez va fi unul dintre catalizatorii acestei ample mişcări, în *Isagoge* el lansează un vast program de modernizare a algebrei şi aici cheia de boltă o constituie introducerea calculului literal, cu alte cuvinte calculul cu literele alfabetului. Propunerea sa este pe cât de simplă, pe atât de derutantă: numirea necunoscutelor din ecuaţii se face prin vocale, iar numerele cunoscute prin consoane.

Această repartizare a vocalelor şi a consoanelor va fi totuşi repede abandonată în

favoarea unei sugestii uşor diferită de cea a lui Descartes, anume primele litere ale alfabetului *(a, b,* c...) vor desemna cantităţile cunoscute, iar ultimele litere *(x, y* şi z) vor semnifica necunoscutele.
Această convenţie este utilizată si astăzi de cea mai mare
parte a matematicienilor, iar litera „x" s-a impus până şi în limbajul curent ca simbol al necunoscutului şi al misterului.

Pentru a înţelege bine în ce fel se transformă algebra printr-un nou limbaj, să ne aducem aminte de ecuaţia următoare:

Se caută un număr care înmulţit cu 5 să dea 30.

Datorită noului simbolism, această ecuaţie se scrie de acum încolo doar cu câteva semne: 5 x *x* = 30.

Spuneţi dumneavoastră că nu este o formulare mult mai scurtă! Aduceţi-vă aminte şi de faptul că această ecuaţie nu era decât un caz particular al unei clase cu mult mai mari:

Se caută un număr care înmultit cu o anumită canti-
tate 1 să dea o cantitate 2.

Această ecuaţie se va nota de acum încolo *a x x = b.*
Numerele *a* si *b* stim că sunt cantităti cunoscute si de aceea
t
le-am luat de la începutul alfabetului, iar cu ajutorul lor îl vom calcula pe *x.* Şi, aşa cum am

văzut deja, ecuaţiile de acest tip se rezolvă prin divizarea celei de-a doua cantităţi cunoscute prin prima; cu alte cuvinte: x = b : a.

De acum încolo matematicienii se vor apuca să creeze liste de cazuri posibile şi să stabilească reguli de manipulare ale ecuaţiilor literale. Algebra se va transforma puţin câte puţin într-o formă de joc ale cărui mişcări autorizate sunt determinate de aceste reguli de calcul. Hai să reluăm rezolvarea ecuaţiei! Trecând de la *a x x = b* la *x = b : a,* litera *a* a trecut de la stânga la dreapta semnului =, iar operaţia s-a transformat din înmulţire în împărţire. Deci, avem o regulă autorizată: orice cantitate înmulţită poate să treacă de cealaltă parte a egalităţii, devenind împărţire. Reguli asemănătoare ne permit să facem acelaşi lucru cu adunările şi scăderile sau cu transformările puterilor. Scopul jocului este acelaşi: de a se afla valoarea necunoscutei *x.*

Acest joc al simbolurilor este atât de eficient, încât algebra îşi va căpăta repede independenţa în raport cu geometria. Nu va mai fi nevoie să interpretăm înmulţirile drept operaţii făcute pe dreptunghiuri şi nici să facem demonstraţii sub formă de puzzle-uri. Acum sunt la putere x_f *y* şi z! Mai mult decât atât, eficienţa extraordinară a calculului literal va răsturna raportul de forţe şi, în curând, chiar geometria va fi cea care va deveni dependentă de demonstraţiile algebrice.

Răsturnarea de situaţie va fi declanşată de francezul René Descartes prin introducerea unui

mijloc simplu şi puternic de algebrizare a problemelor geometriei cu ajutorul unui sistem de axe de coordonate.

Coordonatele carteziene

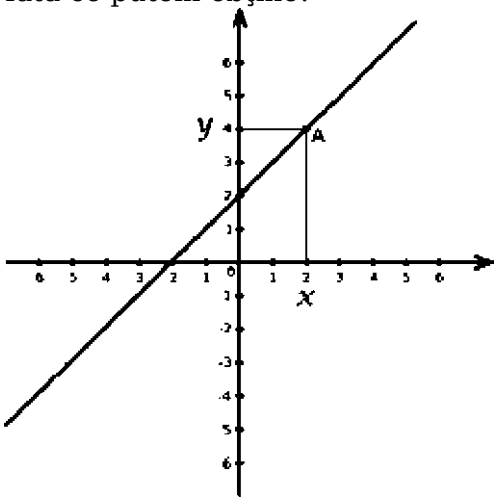
Ideea lui Descartes este pe cât de simplă, pe atât de genială: se plasează într-un plan două drepte gradate, una orizontală şi cealaltă verticală, pentru a reprezenta fiecare punct geometric prin coordonatele sale
raportate la cele două axe. De exemplu, să privim, la
punctul A din figura de mai jos: *
A
——■ * ■ , ----------
11 4 3 2 1 °] 2] i 1 «

Punctul A se găseşte chiar deasupra gradaţiei 2 de pe axa orizontală şi la nivelul gradaţiei 4 de pe axa verticală. Coordonatele sale sunt aşadar 2 şi 4. Prin acest procedeu este posibil să fie reprezentat fiecare punct geometric prin două numere şi invers; asocierea unui punct se face cu o pereche de numere.

încă de la începuturile lor, geometria şi numerele au întreţinut întotdeauna raporturi foarte strânse, dar, odată cu apariţia coordonatelor lui Descartes, cele două discipline se vor contopi una cu cealaltă. Fiecare problemă de geometrie va putea de acum încolo să fie interpretată algebric şi fiecare problemă de algebră poate fi reprezentată geometric.

De exemplu, să privim următoarea ecuaţie de gradul I: $x + 2 = y$. Aceasta este o ecuaţie cu

două necunoscute: adică le vom căuta pe *x* şi pe *y*. Este posibil să avem *x* = 2 şi *y* = 4, ceea ce reprezintă o soluţie, deoarece 2 + 2 = 4. în acest sens se poate observa că numerele 2 şi 4 sunt exact coordonatele punctului A. Această soluţie poate fi reprezentată geometric prin acest punct. De fapt, ecuaţia *x* + 2 = *y* are o infinitate de soluţii. De exemplu, *x* = 0 şi *y* = 2 sau *x* = 1 şi *y* = 3. Pentru fiecare valoare posibilă a lui *x* este posibil să găsim pe y-ul corespondent adăugându-i 2. în acest caz putem să aşezăm în planul nostru toate punctele care corespund acestor soluţii. Iată ce putem obţine!

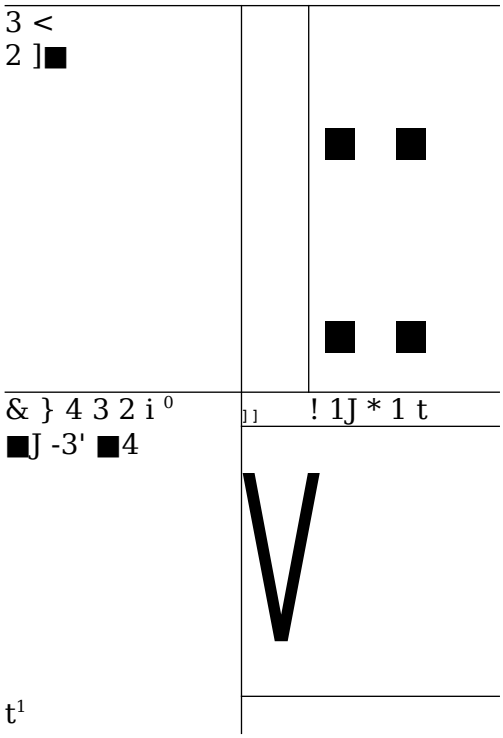


Am obţinut o linie dreaptă! Toate soluţiile se aliniază perfect pentru a forma o linie dreaptă. Niciuna nu va ieşi din cadrul ei. în lumea lui Descartes, această dreaptă este deci

reprezentarea geometrică a ecuaţiei, tot aşa cum ecuaţia este reprezentarea algebrică a acestei drepte. Cele două obiecte se confundă şi nu rareori, în zilele noastre, îi vom auzi pe matematicieni vorbind despre dreapta „ $x + 2 =$ y". De fapt, dăm acelaşi nume unor lucruri diferite; algebra şi geometria sunt pe cale să devină una şi aceeaşi disciplină.

Această corespondenţă deschide calea apariţiei unui întreg dicţionar care permite traducerea obiectelor din limbajul geometric în cel algebric şi *viceversa.* De exemplu, ceea ce numim „mijloc" în geometrie, poartă numele de „medie" în algebră. Să revenim asupra punctului nostru A, de coordonate 2 şi 4, şi să-i adăugăm un punct B, de coordonate 4 şi -6. Pentru a găsi mijlocul segmentului AB este suficient să calculăm media coordonatelor. Prima coordonată a lui A este 2 şi cea a lui B este 4. Aşadar, se poate deduce că prima coordonată a mijlocului este egală cu media celor două numere: (2 + 4) / 2 = 3. Făcând acelaşi lucru pe axa verticală, vom avea (4+(-6)) / 2 = -l. Deci, coordonatele punctului de mijloc sunt 3 şi -l. Se poate verifica foarte uşor dacă desenăm figura

J ■î.



în acest dicţionar de algebră-geometrie, un cerc devine o ecuaţie de gradul II, punctul de intersecţie a două curbe este dat de un sistem de ecuaţii, în timp ce în teorema lui Pitagora, construcţiile trigonometrice sau decupajele în puzzle se metamorfozează în diferite formule literale.

Pe scurt, nu mai este nevoie ca figurile să fie trasate pentru a face geometrie; calculele algebrice le-au luat locul şi sunt extrem de rapide şi practice.

în secolele care vor urma, coordonatele lui Descartes vor înregistra numeroase succese. Una dintre cele mai frumoase reuşite ale coordonatelor a fost fără îndoială rezolvarea unei conjecturi care punea problem
ematematicienilor încă din Antichitate: cvadratura cercului.

Se poate, oare, trasa cu ajutorul riglei şi compasului un pătrat care să aibă aceeaşi suprafaţă cu un anumit cerc dat? Să ne aducem aminte de scribul Ahmes care în urmă cu mai mult de trei mii de ani îşi bătea capul cu această întrebare. După el, chinezii şi grecii şi-au încercat forţele fără prea mult succes, iar problema a devenit de-a lungul secolelor una dintre cele mai mari conjecturi din matematică.

Datorită coordonatelor carteziene, liniile drepte construite cu ajutorul riglei se transformă în ecuaţii de gradul întâi, iar cercurile trasate cu compasul devin ecuaţii de gradul doi. Deci, din punct de vedere algebric, cvadratura cercului se pune în felul următor: se poate găsi oare o succesiune de ecuaţii de gradele I şi II care ar avea ca soluţie numărul n? Această nouă formulare va relansa cercetările, dar chiar şi aşa pusă, întrebarea rămâne complicată.

în cele din urmă, matematicianul german Ferdinand von Lindemann este cel care a pus capăt problemei în 1882. Nu, numărul n nu este

soluţie a ecuaţiilor de gradul I sau II, deci cvadratura cercului rămâne imposibilă. Astfel a căzut problema care astăzi îşi păstrează titlul conjecturii ce a rezistat cel mai mult timp asalturilor matematicienilor.

Coordonatele carteziene se pot generaliza uşor în geometria în spaţiu. în trei dimensiuni fiecare punct este identificat de trei coordonate, iar procedeele algebrice pot fi aplicate în acelaşi fel.

Lucrurile devin mai delicate imediat ce se trece la cea de-a patra dimensiune. în geometrie este imposibil să reprezentăm o figură în 4D, deoarece întreaga noastră lume fizică nu există decât în 3D. în schimb, în algebră, nu trebuie să ne facem griji pentru acest lucru: un punct dintr-a patra dimensiune este doar o listă de patru numere, iar toate metodele algebrice pot fi aplicate aici în mod natural. De exemplu, dacă se consideră punctele A şi B ale căror coordonate sunt pe de o parte 1, 2, 3 şi 4, iar pe de altă parte 5, 6, 7 şi 8, se poate foarte uşor utiliza media acestor numere pentru a afirma că mijlocul lor este punctul de coordonate 3, 4, 5 şi 6. Geometria în patru dimensiuni va fi exploatată în mod special în secolul XX de către teoria relativităţii a lui Albert Einstein, cel care va utiliza cea de-a patra coordonată pentru a modela timpul.

Şi putem continua astfel multă vreme. O listă de cinci numere este un punct în dimensiune 5. Adăugaţi

un al saselea număr si iată-ne în dimensiunea 6. Nu
//
există nicio limită impusă acestui demers. O listă de o mie de numere este un punct într-un spaţiu de dimensiunea 1 000.

în sensul acesta, analogia poate părea un simplu joc de limbaj gata să ne provoace râsul şi neavând o utilitate reală. Dar aparenţele ne înşală. Această corespondenţă are multe aplicaţii, mai exact în statistică, al cărei scop este acela de a studia liste lungi de date numerice.

De exemplu, dacă se studiază datele demografice ale unei populaţii, ne-am putea dori să identificăm în ce măsură anumite caracteristici precum înălţimea, greutatea sau obiceiurile alimentare ale unui grup de indivizi fluctuează în jurul unei valori. Interpretând această problemă geometric, ar însemna să calculăm distanţa dintre două puncte în care primul reprezintă lista de date cu privire la fiecare individ, iar al doilea reprezintă lista cu valorile medii. Astfel, vor exista tot atâtea coordonate câţi indivizi există în grup.

Calculul se face, în cazul acesta, cu ajutorul triun- ghiurilor dreptunghice, în care se poate aplica teorema lui Pitagora. Deci, un statistician care calculează devierea standard a unui grup de o mie de indivizi foloseşte adesea, fără să ştie, teorema lui Pitagora într-un spaţiu de dimensiune 1 000. Această metodă se aplică şi în biologia

evoluţionistă, pentru calcularea diferenţelor genetice între două populaţii de animale. Măsurând, cu ajutorul formulelor deduse din geometrie, distanţa dintre genomurile codate ale acestora sub forma unor liste de numere, se poate stabili apropierea relativă între diferite specii şi se poate deduce puţin câte puţin arborele genealogic al lumii vii.

Am putea chiar să împingem cercetarea până la a utiliza liste infinite de numere, adică să folosim puncte într-un spaţiu de dimensiune infinită. De fapt, deja cunoaştem astfel de liste. Este vorba despre şirurile numerice precum cel al lui Fibonacci. Studiind iepurii, matematicianul italian făcea, fără să-şi dea seama, geometrie în dimensiune infinită. Exact această interpretare geometrică va fi cea care le va permite matematicienilor din secolul al XVIII-lea să stabilească astfel cât mai clar posibil legătura subtilă care leagă şirul lui Fibonacci cu numărul de aur

17
.Alfabetul lumii

„Filosofía este scrisă în această imensă carte mereu deschisă în faţa ochilor noştri care este universul, dar pe care nu o putem înţelege dacă nu încercăm mai întâi să-i înţelegem limba şi să-i cunoaştem semnele cu care este scrisă. Ea este scrisă în limba matematică, iar semnele sunt triunghiurile, cercurile sau alte figuri geometrice fără de care ar fi imposibil ca fiinţa umană să înţeleagă un cuvânt.”

Acest paragraf, unul dintre faimoasele texte din istoria stiintelor, a fost scris în 1623 de Galilei însusi într-o
''''
lucrare intitulată *II Saggiatore (Experimentatorul).*

Fără îndoială că Galilei este unul dintre cei mai prolifici şi inovatori oameni de ştiinţă ai tuturor timpurilor, în general, savantul italian este considerat fondatorul ştiinţei fizice moderne. Trebuie să spunem că CV-ul său este cel puţin impresionant. El este inventatorul lunetei astronomice, este cel care a descoperit inelele lui Saturn, petele solare, fazele lui Venus şi cei patru sateliţi principali ai lui Júpiter. El a fost unul dintre cei mai influenţi apărători ai heliocentrismului lui Copernic; este cel care a enunţat principiul relativităţii mişcării - care îi poartă astăzi numele - şi a fost primul care a studiat în mod experimental căderea corpurilor.

II Saggiatore arată cât de puternică este legătura, chiar şi în această epocă, dintre matematică şi fizică. Galilei este unul dintre primii care a contribuit la această apropiere dintre cele două stiinte. A urmat o scoală foarte bună, deoarece, la vârsta de 19 ani, Ostilio Ricci, unul dintre elevii lui Tartaglia, este cel care l-a iniţiat în matematică. El va fi urmat de generaţii întregi de oameni de ştiinţă, pentru care algebra şi geometria vor reprezenta incontestabil limba în care lumea poate fi exprimată.

Trebuie să subliniem foarte puternic natura acestei relaţii care ia naştere între matematică si fizică. Facem acest lucru deoarece, după cum am văzut până acum de atâtea ori încă de la începutul istoriei noastre, matematica a fost întotdeauna folosită pentru a studia şi a înţelege lumea. Dar ceea ce s-a întâmplat în secolul al XVII-lea este ceva cu totul nou. Până acum, modelele matematice rămâneau la stadiul de constructii umane, fiind copii fidele ale realităţii, dar necreate de aceasta. Atunci când topografii mesopotamieni utilizau geometria pentru a măsura un câmp dreptunghiular, acesta era trasat de către oameni. Dreptunghiul nu aparţinea naturii înainte ca agricultorul să-l delimiteze. La fel, atunci când geografii triangulau o regiune pentru a-i desena

harta, triunghiurile pe care le luau în considerare erau pur artificiale.

O cu totul altă provocare a fost aceea de a dori să fie matematizată lumea preexistentă omului! Este adevărat că unii oameni de stiintă au încercat acest lucru încă din Antichitate. Aduceţi-vă aminte că unul dintre aceştia a fost Platon, cel care asocia cele cinci poliedre regulate cu cele patru elemente ale Cosmosului. Chiar şi pitagoricienii erau în mod deosebit reticenţi faţă de acest gen de interpretare, dar trebuie să recunoaştem că teoriile lor cel mai adesea nu aveau nimic serios în ele. Erau construite pe baza unor consideraţii pur metafizice şi fără să fie niciodată testate în mod experimental, şi de aceea aproape toate s-au dovedit în cele din urmă a fi false.

Ceea ce vor înţelege oamenii de ştiinţă din secolul al XVII-lea va fi că natura însăsi, în funcţionalitatea sa profundă, este determinată de legi matematice exacte, care pot fi scoase la lumină cu ajutorul experimentelor. Una dintre cele mai strălucite realizări ale acestei epoci este, fără nicio îndoială, legea gravitaţiei universale, descoperită de Isaac Newton.

în *Philosophiae naturalis principia mathematica (Principiile matematice ale filosofiei naturale),* omul de ştiinţă englez este primul care a înţeles că rotaţia astrelor şi căderea corpurilor pe Pământ pot fi explicate printr-un singur şi acelaşi fenomen. Toate obiectele din Univers se atrag între ele.

Această forţă este întru totul nedetectabilă pentru obiectele mici, dar devine semnificativă în cazul planetelor sau stelelor. Pământul atrage obiectele şi aceasta este raţiunea pentru care obiectele cad. Pământul atrage şi Luna şi, într-un anume sens, Luna cade şi ea. Dar cum Pământul este rotund, iar Luna se deplasează cu foarte mare viteză, aceasta din urmă cade în permanenţă pe lângă Pământ, lucru care o conduce la mişcarea în cerc. Conform aceluiaşi principiu, planetele se învârt în jurul Soarelui.

Newton nu se multumeste doar cu enunţarea acestei
'''
legi a atracţiei universale. El precizează şi intensitatea forţei cu care obiectele se atrag între ele şi face acest lucru printr-o formulă matematică. Două corpuri oarecare se atrag cu o forţă proporţională cu produsul maselor acestora împărţit la pătratul distanţei dintre ele. Această formulă poate fi scrisă după cum urmează, conform calculului literal al lui Viete:

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

în acestă formulă, litera F reprezintă intensitatea forţei, m_1 şi m_2 sunt masele respective ale celor două obiecte cărora le studiem atracţia, iar *d* este distanţa care le separă. în ceea ce priveşte numărul G, acesta este o constantă fixă care are valoarea de 0,0000000000667. Această valoare atât de mică explică faptul că forţa este

insesizabilă pentru obiectele mici şi că este nevoie de masele imense ale planetelor şi ale stelelor pentru ca gravitaţia să poată fi simţită. Gândiţi-vă că, de fiecare dată când doriţi să ridicaţi un obiect, veţi demonstra că
forţa musculară este mai mare decât forţa de atractie a
> t t
întregului Pământ!

Odată formula stabilită, problemele fizicii se metamorfozează în probleme matematice. Astfel, este posibil să calculăm traiectoriile obiectelor celeste şi, mai exact, putem să anticipăm evoluţia viitoare a acestora. A găsi data în care va avea loc următoarea eclipsă înseamnă a găsi valoarea necunoscutei dintr-o ecuaţie algebrică.

în deceniile care vor urma, formula lui Newton va înregistra numeroase succese. Gravitaţia universală i-a permis să spună că Pământul trebuia să fie uşor aplatizat la poli, lucru care a fost confirmat de geometrii care au măsurat meridianul prin triangulaţie. Una dintre cele mai spectaculoase realizări ale teoriei newtoniene rămâne totuşi calculul prin care anunţa revenirea cometei Halley.

încă din Antichitate, oamenii de stiintă au observat
7 / /
şi consemnat apariţia aleatorie a cometelor. Pentru a explica acest fenomen, două şcoli erau în dispută: aristotelicii considerau cometele fenomene atmosferice care se petreceau relativ aproape de

Pământ, în timp ce pitagoreicii le vedeau ca pe un fel de planete, adică obiecte mult mai îndepărtate. Atunci când Newton a publicat *Principia mathematica,* polemica încă nu fusese pe deplin încheiată, iar oamenii de stiintă din cele două scoli con-
tinuau să se certe pe acest subiect.

Unul dintre mijloacele de a dovedi că aceste comete sunt astre îndepărtate care orbitează în jurul Soarelui ar fi acela de a le descoperi o anumită periodicitate: un obiect care orbitează trebuie să treacă prin acelaşi punct la intervale regulate. Din păcate, la începutul secolului al XVIII-lea, nicio regularitate de acest gen nu a putut fi încă identificată. Dar apoi, în 1707, Edmund Halley, un astronom britanic, prieten al lui Newton, a anunţat că s-ar putea să fi găsit ceva.

în 1682, Halley a observat o cometă care, într-un prim moment, nu i se păruse extraordinară. Totuşi, în anul precedent, astronomul fusese în Franţa unde îl întâlnise pe Cassini I la Observatorul din Paris. Acesta împărtăşea cu Halley ipoteza unei reveniri periodice a cometelor. Halley s-a adâncit în arhivele astronomice şi a descoperit aici alte două treceri de comete care i-au atras
atentia. Una din 1531 si alta din 1607. Cometele din
1531, 1607 şi 1682 alcătuiau două intervale identice de 76 de ani. Dacă ar fi fost vorba despre o

aceeaşi cometă? Halley a făcut pariu şi a anunţat că această cometă va reveni în 1758.

Au urmat cincizeci de ani de suspans. Aşteptarea era insuportabilă şi trepidantă. Alţi oameni de ştiinţă au profitat de aceste momente pentru a face mai precisă predic- ţia lui Halley. în acest sens, s-a sugerat că atracţia gravitaţională a celor două planete gigantice care sunt Jupiter şi Saturn ar putea să modifice puţin traiectoria cometei, în 1757 astronomul Jérôme Lalande şi matematiciana Nicole-Reine Lepaute s-au apucat să facă diferite calcule bazându-se pe un model realizat de Alexis Clairaut pornind de la ecuaţiile lui Newton. Calculele sunt lungi şi plictisitoare şi a fost nevoie de mai multe luni pentru ca cei trei oameni de ştiinţă să prezică în final o trecere a cometei prin punctul cel mai apropiat de Soare în aprilie 1759, cu o marjă de eroare posibilă de maximum o lună.

Şi atunci s-a produs lucrul de necrezut! Cometa s-a aflat la punctul de întâlnire, iar întreaga lume a văzut-o marcând pe cer triumful lui Newton şi Halley. Ea a trecut pe lângă Soare pe 13 martie în intervalul calculat de Clairaut, Lalande şi Lepaute. Din păcate, Halley nu a trăit atât de mult timp pentru a asista la revenirea cometei căreia i s-a dat numele său, dar, cu toate acestea, teoria gravitaţiei şi, pornind de la ea, matematizarea fizicii au făcut dovada strălucită a puterii lor extraordinare.

Ca o ironie a istoriei, Galilei, în afară de discursul asupra matematizării lumii, susţinea în al

său *Experimentator* teza cometelor atmosferice. De fapt, cartea sa era un răspuns dat matematicianului Orazio Grassi care cu câţiva ani înainte apărase punctul de vedere opus. Renumele lui Galilei şi tonul foarte polemic al cărţii sale au făcut din ea un bestseller în epocă, dar nici celebritatea şi nici succesul nu constituie adevărul. *E pur si muove...* ar fi putut să-i răspundă Grassi lui Galilei.

Dincolo de eroarea lui Galilei, această anecdotă ne arată în mod excepţional robusteţea procesului ştiinţific care începe să se constituie în această epocă. Concluziile metodei ştiinţifice nu depind de opinia prealabilă a savantului care o pune în practică, chiar dacă acesta este Galilei. Faptele sunt încăpăţânate! Natura reală a cometelor, precum şi cea a totalităţii obiectelor care alcătuiesc lumea fizică sunt independente de ideea pe care şi-o fac oamenii despre ele. în Antichitate, atunci când un om de ştiinţă recunoscut se înşela, o grămadă de discipoli îl urmau, în general, fără ezitate, căci autoritatea ţinea locul argumentului. Adesea, mai multe secole nu erau suficiente pentru a dărâma o idee preconceputǎ, cu toate că o simplă experienţă ar fi putut să o contrazică. Identificarea erorii lui Galilei în doar câţiva zeci de ani constituie semnul existentei unui mediu stiintific sănătos. / *t t*

A prevedea traiectoria unei comete pe care am vă- zut-o deja reprezintă un lucru deosebit, dar cu totul altceva este să calculezi traiectoria unui astru despre care nu se ştie nimic. în rândul marilor reuşite matematice în astronomie trebuie să luăm

în considerare şi descoperirea planetei Neptun în secolul al XlX-lea. Cea de-a opta şi ultima planetă a sistemului solar este singura care a fost descoperită nu în urma observaţiilor, ci în urma calculelor. Datorăm această reuşită astronomului si matematici-
anului francez Urbain Le Verrier.

încă de la sfârsitul secolului al XVIII-lea, mai mulţi
astronomi au observat neregularităţi în traiectoria planetei Uranus, pe atunci ultima planetă cunoscută a sistemului solar. Aceasta nu urma în mod exact traiectoria care era prezisă de legea gravitaţiei universale. Aşadar, nu puteau exista decât două explicaţii: fie teoria lui Newton era falsă, fie un alt astru încă necunoscut era responsabil de aceste perturbaţii. Pornind de la traiectoria observată a lui Uranus, Le Verrier a început să calculeze poziţia acestei noi planete ipotetice. I-au trebuit doi ani de muncă asiduă pentru a ajunge la un rezultat.

Apoi a sosit şi ceasul adevărului. în noaptea de 23 spre 24 septembrie 1846, astronomul german Johann Gottfried Galle şi-a îndreptat luneta în direcţia pe care i-a indicat-o Le Verrier, a privit prin ocular şi... iat-o: o mică pată albăstruie pierdută în profunzimile nebănuite ale cerului nocturn! Planeta se afla chiar acolo, la mai mult de patru miliarde de kilometri de Pământ.

Ce sentiment formidabil si îmbătător, ce senzaţie
de putere sau de emoţie formidabilă or fi pus stăpânire în acea zi pe Le Verrier, cel care din vârful peniţei sale şi cu ajutorul ecuaţiilor a reuşit să captureze, să cuprindă şi aproape să controleze dansul titanic al planetelor care se învârt în jurul Soarelui! Cu ajutorul matematicii, monştrii celeşti care erau zeităţi odinioară au ajuns dintr-odată să fie îmblânziţi, docili şi torcând domesticiţi precum pisicile, sub mângâierile algebrei. Se poate imagina cu uşurinţă starea de intensă exaltare în care a ajuns comunitatea astronomică mondială în zilele care au urmat, când orice astronom amator, îndreptându-şi luneta spre Neptun, se simţea înfiorat.

Dar viata unei teorii stiintifice are fazele sale!

Mai întâi există momentul ipotezelor, al ezitărilor, al erorilor, al construcţiei progresive şi înceţoşate a ideilor. Urmează momentul confirmării, momentul experienţelor care validează sau nu ecuaţiile şi care, precum nişte judecători inflexibili, le confirmă sau le resping definitiv. Apoi există perioada de înălţare, adică de căpătare a independenţei. Este momentul în care teoria are destul de multă încredere în ea pentru a îndrăzni să-i vorbească lumii, fără să mai fie nevoie să o privească în ochi. Acesta este momentul în care ecuaţiile pot să preceadă experienţa şi să prezică un fenomen care este încă neobservat, neaşteptat şi chiar nesperat.

Este clipa în care teoria trece de la a fi descoperită la a fi descoperitoare, în care se aliază şi devine aproape colegă cu oamenii de ştiinţă care au creat-o. în această fază, teoria este coaptă şi aşa se poate spune că am ajuns la momentul cometelor lui Halley şi al descoperirii lui Neptun. De asemenea, este momentul eclipselor lui Einstein, precum cea din 29 mai 1919, prin care s-a putut vedea triumful relativităţii, este timpul bosonilor lui Higgs, descoperiţi în 2012 conform previziunilor modelului standard al fizicii particulelor, sau este timpul undelor gravitaţionale, detectate pentru prima oară la 14 septembrie 2015.

Toate marile descoperiri ştiinţifice, pentru a deveni adulte şi a-şi câştiga legitimitatea, au o nevoie vitală de matematică, de ecuaţiile algebrice şi de figurile geometrice. Matematica a ştiut să facă dovada puterii ei incredibile, astfel încât nicio teorie fizică serioasă nu ar îndrăzni astăzi să se prezinte într-un alt limbaj decât cel matematic.

Cristalografie

Matematizarea lumii se face şi în chimie, acolo unde vom regăsi acum vechi cunoştinţe. La începutul secolului XX, mineralogul francez René Just Hauy, în momentul în care i-a scăpat din mâini o rocă de calcit, a constatat că aceasta se sparge într-o multitudine de bucăţi care au toate aceeaşi structură geometrică. Bucăţile nu sunt aleatorii, acestea au feţe plane care formează unghiuri foarte precise unele faţă de altele. Pentru ca un astfel de fenomen să se producă, Hauy a dedus că blocul de calcit trebuie să fie alcătuit dintr-o mulţime de elemente asemănătoare, care se asamblează unele cu celelalte într-o manieră perfect regulată. Un solid care are această proprietate se numeşte cristal. Cu alte cuvinte, un cristal observat la scară microscopică este alcătuit dintr-un motiv, cu mai mulţi atomi sau molecule care se repetă identic în toate direcţiile.Un motiv care se repetă? Acesta nu vă aduce aminte de nimic? Principiul seamănă uimitor de mult cu frizele mesopotamiene şi cu pavajele arăbeşti. O friză prezintă un motiv care se repetă — conform unei direcţii, iar un pavaj conform cu două direcţii. Deci pentru a studia un cristal trebuie să reluăm aceleaşi principii, dar de astă dată într-un spaţiu cu trei dimensiuni. Artizanii mesopotamieni au descoperit şapte categorii de frize, iar artiştii arabi pe cele şaptesprezece ale pavajelor. Datorită structurilor algebrice, de atunci încolo a fost posibil să se demonstreze că aceste numere sunt optime, căci nu lipseşte nicio combinaţie. Aceleaşi structuri algebrice ne vor

permite să stabilim că există 230 categorii de pavaje în 3D. De exemplu, printre cele mai simple pot fi găsite pavajele alcătuite din cuburi, prisme hexagonale sau octoedre trunchiate[1], reprezentate mai jos.

De la stânga la dreapta: aranjament de cuburi, de prisme hexagonale şi de octoedre trunchiate. Aceste aranjamente se pot prelungi la infinit în spaţiu.

Octoedrul este unul dintre cele cinci solide ale lui Platon pe care le-am întâlnit deja. Octoedrul trunchiat se obţine prin tăierea vârfurilor octo- edrului în acelaşi fel în care obţinem icosaedrul trunchiat (mingea de fotbal); care se obţine prin tăierea vârfurilor unui icosaedru. *(N.a.)*

Aceste figuri se aranjează şi se îmbină de fiecare dată în mod perfect fără a lăsa găuri, formând deci o structură care se poate prelungi la infinit în toate direcţiile. Cine ar fi crezut că gândirea geometrică a artizanilor mesopotamieni conţinea în germene bazele a ceea ce va deveni mai târziu una dintre componentele esenţiale ale studiului proprietăţilor materiei?

Cristalele se găsesc cam peste tot în viaţa noastră cotidiană. Am putea să ne gândim la sarea de bucătărie, care este alcătuită dintr-o multitudine de mici cristale de clorură de sodiu, sau la cuarţ, ale cărui oscilaţii foarte regulate atunci când îi aplicăm un curent electric fac din el un element indispensabil pentru buna funcţionare a ceasurilor noastre.

Trebuie să avem totuşi grijă, căci cuvântul cristal este câteodată utilizat în mod abuziv în limbajul

curent. Astfel, în realitate, paharele de cristal nu sunt alcătuite din cristale în sensul ştiinţific al termenului.
Dacă doriţi să admiraţi specimene mult mai spectaculoase, puteţi să vizitaţi o colecţie de mineralogie, cum ar fi, de exemplu, cea de la Universitatea Pierre şi Mărie Curie din Paris, care este una dintre cele mai frumoase din lume.

Eficacitatea extraordinară a matematizării lumii nu răspunde totuşi la o întrebare surprinzătoare. Cum se face că limbajul matematic este perfect adaptat pentru descrierea lumii? Pentru a înţelege în ce sens întrebarea este uimitoare, să revenim la formula lui Newton.

$$\mathbf{m\ 1\ X\ 7712}$$
$$J^2$$

Aşadar, intensitatea forţei gravitaţionale se enunţă printr-o formulă care introduce două înmulţiri, o împărţire şi o ridicare la pătrat. Simplitatea acestei formule pare a fi o şansă nemaipomenită. Ştim foarte bine că nu toate numerele se pot exprima prin formule matematice simple. Este cazul numărului n şi al altora de acest fel. Din punct de vedere statistic, numerele complicate sunt cu mult mai numeroase decât cele simple. Dacă luaţi un număr la întâmplare, veţi avea mult mai multe şanse să daţi peste un număr cu virgulă decât peste un număr întreg. Tot aşa veţi avea mai multe şanse să daţi peste un

număr care are o înşiruire zecimală infinită decât finită
/
si cu mult mai multe sanse să dati de un număr care nu
///
poate fi exprimat prin nicio formulă care să se calculeze cu ajutorul operaţiilor elementare.

$$F = Gx$$

Formula lui Newton este cu mult mai uimitoare decât toate acestea, căci forţa variază în funcţie de masele şi distanţa dintre obiecte. Nu avem de-a face cu o simplă constantă precum 7t. Cu toate acestea, oricare ar fi masele celor două corpuri şi oricare ar fi distanţa dintre ele, atracţia pe care acestea o exercită unul asupra celuilalt se măsoară întotdeauna cu ajutorul acestei formule. înainte ca Newton să-şi elaboreze legea, ar fi fost raţional să se considere că intensitatea forţei este absolut inexprimabilă printr-o formulă matematică. Iar când această formulă s-ar fi descoperit, ne-am fi aşteptat să dăm peste una complexă care să conţină operaţii mult mai grele decât înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la pătrat.

Ce şansă de nesperat ne-a adus formula lui Newton prin forma în care aceasta se prezintă! Şi ce mister incredibil ca natura să ne vorbească atât de elegant în limba matematicii! S-a întâmplat deseori ca modele realizate de matematicieni doar pentru frumuseţea lor să-şi găsească aplicabilitate în ştiinţele fizice multe secole după elaborarea lor. Dar acest mister nu se opreşte doar la gravitaţie.

Fenomenele electromagnetice, funcţionarea cuantică a particulelor elementare, deformarea relativistă a spaţiului-timp, toate aceste fenomene se exprimă în matematică cu o precizie uimitoare.

Să luăm faimoasa formulă $E = mc^2$. Această egalitate stabilită de Albert Einstein oferă o echivalentă între masa şi energia obiectelor fizice. Nu vom explica această formulă aici, căci nu despre ea este vorba. Doar gândiţi-vă la acest lucru: principiul lui Einstein, care este în general considerat unul dintre cele mai fascinante şi mai profunde principii care exprimă funcţionarea Universului nostru, este pus într-o formulă algebrică de doar cinci simboluri! Prin ce minune s-a făcut acest lucru? în general, împrumutăm de la Einstein fraza care rezumă întreaga situaţie uimitoare: „Cel mai de neînţeles lucru în Univers este că acesta poate fi înţeles!" Trebuie să pricepem formula aceasta „de înţeles" cu ajutorul matematicii. în 1960, fizicianul Eugene Wigner va vorbi şi el despre „iraţionala eficacitate a matematicii".

Şi atunci, cunoaştem noi atât de bine aceste obiecte abstracte, numere, figuri, şiruri sau formule pe care credem că le-am creat? Dacă matematica este cu adevărat produsă de creierul nostru, de ce le regăsim dincolo de cutiile noastre craniene ca pe nişte spirite rătăcitoare? Ce caută ele în lumea fizică? Există acestea cu adevărat acolo? Nu ar trebui, oare, să vedem mai degrabă în

aceste fantome ale realului o imensă iluzie optică? A considera
că obiectele matematicii ar avea o formă de existentă
în afara spiritului uman ar însemna să le acordăm o realitate, pe când ele nu sunt decât pure abstracţii. Ce ar semnifica în cazul acesta verbul „a exista” pe care îl asociem acestora, din moment ce ele nu au nimic material în sine?

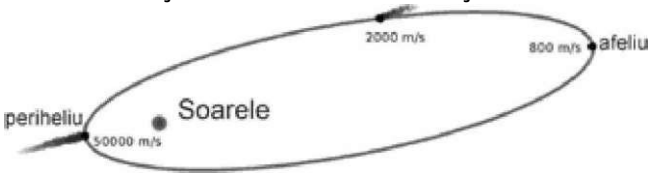
Nu vă bazaţi pe mine pentru a avea cel mai mic început de răspuns la aceste întrebări! Infinitul mic

Strânsa colaborare dintre matematică si fizică nu va
rămâne mult timp într-un sens unic. începând cu secolul al XVII-lea, cele două discipline nu vor înceta deloc să facă schimburi de idei şi să se hrănească una pe cealaltă. Deoarece fizica este înfometată de formule, fiecare nouă descoperire pune de-acum încolo o problemă matematică ce se ascunde în spatele ei. Există acestea deja sau sunt inventate? în cea de-a doua eventualitate, matematicienii se găsesc puşi în dificultatea de a sculpta pe măsura fizicii noi teorii. în acest caz, vor găsi în ştiinţele fizicii una dintre cele mai frumoase muze ale lor.

Dezvoltarea gravitaţiei newtoniene este una dintre primele care a necesitat matematici inovatoare. Pentru a o înţelege, să revenim pe pista cometei Halley! A cunoaşte forţa care o atrage spre Soare este un lucru, dar cum putem, pornind de la această informaţie, să-i deducem traiectoria şi să obţinem datele utile despre ea, precum poziţia pe care o are la o anumită dată sau perioada precisă a revoluţiei sale?

Una dintre întrebările clasice la care va fi nevoie de un răspuns este exact aceea cu privire la distanţa parcursă în funcţie de viteză. Dacă vă spun

că viteza cu care cometa străbate spaţiul este de 2 OOO de metri pe secundă şi dacă v-aş cere să găsiţi distanţa pe care ea o parcurge în- tr-un minut, atunci răspunsul ar fi simplu de dat. într-un minut cometa va străbate 60 ori 2 000 de metri, adică 120 000 de metri sau 120 de kilometri. Problema este că realitatea este mult mai complicată decât atât. Viteza cometei nu este fixă, ci variază de-a lungul timpului. Aflată la afeliu, adică în punctul cel mai îndepărtat de Soare, viteza ei este de 800 de metri pe secundă, în timp ce în momentul în care se află la periheliu, adică în cel mai apropiat punct de Soare, ea are o viteză de 50 000 de metri pe secundă. Aşadar avem o diferenţă serioasă.



Şi toată subtilitatea reiese din faptul că între aceste două extreme cometa accelerează progresiv, fără să aibă în niciun moment o viteză fixă. De exemplu, există un moment în care cometa evoluează la 2 000 de metri pe secundă, dar acesta nu durează prea mult. Cu o fracţiune de secundă mai înainte, viteza ei era puţin mai mare, să zicem 2 000,001, iar cu o fracţiune de secundă după aceea viteza s-a transformat în 1 999,999. Este imposibil să găsim cel mai mic interval de timp, fie el şi minuscul, în care cometa să aibă o viteză

constantă. în cazul acesta, cum putem să calculăm cu precizie distanţa pe care o parcurge?

Pentru a răspunde la această întrebare, matematicienii vor reveni la o metodă care seamănă în mod straniu cu cea utilizată acum două mii de ani de Arhimede pentru a calcula numărul n. Aşa cum omul de ştiinţă din Siracuza a aproximat cercul cu ajutorul poligoanelor care au din ce în ce mai multe laturi, tot aşa este posibil să ne apropiem de curba deplasării ei considerând că traiectoria cometei trece prin paliere de viteză având intervale din ce în ce mai scurte. De exemplu, ne putem imagina că traiectoria cometei are o viteză fixă de 800 metri pe secundă într-un anume interval de timp. Apoi trece brusc la 900 de metri pe secundă în intervalul unui alt timp şi aşa mai departe. Traiectoria calculată astfel nu va fi exactă, dar poate fi considerată ca o aproximaţie, iar pentru a creşte gradul de precizie este suficient să rafinăm intervalele. în loc să luăm în calcul intervale de 100 de metri pe secundă fiecare, e posibil să coborâm la tranşe de 10, de 1 sau chiar de 0,1 metri pe secundă. Cu cât tranşele de viteză vor fi decupate mai fin, cu atât rezultatul va fi mai apropiat de traiectoria reală a cometei!

Aproximările succesive obţinute pentru distanţa parcursă între afeliu şi periheliu formează în acest caz un şir care ar putea să semene cu acesta:
47 42 40 39 38,6 38,52 38,46 38,453 ...

Aceste numere sunt date în unităţi astronomice[I]. Altfel spus, dacă se ia în considerare că viteza cometei rămâne fixă în intervale de 100 de metri pe secundă, vom afla că distanţa dintre afeliu şi periheliu este egală cu 47 de unităţi astronomice. Vom avea în acest caz o aproximare grosolană. Dacă rafinăm intervalele şi mergem pe tranşe de 10 metri pe secundă, vom găsi că aceeaşi distantă este de 42 de unitäti astronomice. Rafinând din ce în ce mai mult decupajul vitezelor, se constată în mod clar că aceste lungimi se apropie din ce în ce mai mult de o valoare-limită care se concentrează tot mai mult în jurul lui 38,45. Această valoare limită corespunde în acest caz cu distanţa reală parcursă de cometă între două puncte extreme ale traiectoriei sale.

într-un anumit fel, putem risca să spunem că această valoare-limită corespunde rezultatului obţinut prin decuparea traiectoriei cometei într-o infinitate de intervale infinit de mici. La fel ca în cazul metodei lui Arhimede aplicată în vederea calculării lui 7t, ea se poate reduce la a spune că un cerc este un poligon având o infinitate de laturi, infinit de mici. întreaga problemă a acestor două afirmaţii se găseşte în noţiunea de infinit. Stim încă de la Zenon că infinitul este o noţiune am-

I O unitate astronomică corespunde distanţei Pământ-Soare şi măsoară aproximativ 150 de milioane de kilometri. *(N.a.)*

biguă şi subversivă a cărei manipulare ne împinge spre un echilibru periculos pe care l-am avea chiar pe buza prăpastiei paradoxurilor.

Trebuie să alegem între două opţiuni: fie refuzăm în mod categoric orice intervenţie a infinitului — şi în acest caz ne limităm la a studia în mod laborios problemele fizicii newtoniene cu ajutorul limitelor şirurilor de aproximări —, fie luăm taurul de coarne şi intrăm prudent în mlaştina subdiviziunilor infinit de fine.

Tocmai această a doua cale va fi aleasă de către Newton în cartea sa *Principia mathematica.* El va fi urmat îndeaproape de către matematicianul german Gottfried Wilhelm Leibniz, care va descoperi în mod independent aceleaşi concepte şi va dezvolta cu mai multă precizie anumite noţiuni ce rămâneau destul de vagi la Newton. Din aceste explorări va lua naştere o nouă ramură a matematicii care va căpăta numele de „calcul infinitezimal”.

Problema paternităţii calculului infinitezimal a fost îndelung dezbătută în anii care au urmat. Dacă Newton a fost chiar primul care s-a angajat pe această pistă încă din 1669, el va întârzia să-şi publice rezultatele, iar Leibniz îl va depăşi, publicându-şi lucrările în 1684, cu trei ani înaintea apariţiei *Principia Mathematica*. Din aceste date încâlcite nu va lipsi nici apariţia unei controverse aprinse între englez şi german, care îşi vor reclama, fiecare, inventarea teoriei şi vor merge până într-acolo încât se vor acuza de plagiat. Totuşi

cei doi savanţi se pare că nu-şi cunoscuseră reciproc lucrările şi chiar au inventat calculul infinitezimal în mod independent.

Aşa cum se întâmplă de obicei la începutul unei teorii, nu totul este perfect. Numeroase elemente duc încă lipsă de rigoare şi de justificări în lucrările lui Newton şi ale lui Lebniz. Aproape la fel s-a întâmplat şi în cazul numerelor imaginare, unde s-a observat că anumite metode funcţionează, iar altele nu, fără să putem explica de ce.

Obiectul calculului infinitezimal este aşadar acela
de a cartografia acest teritoriu încă necunoscut marcând
punctele de trecere autorizate şi acelea care, din contră, ne conduc spre impasuri şi paradoxuri.

în 1748, matematiciana italiană Maria Gaetana Agnesi publică *Instituzioni analitiche (Instituţiile analitice),* care constituie primul punct de vedere complet despre starea tinerei discipline. Un secol mai târziu, germanul Bernhard Riemann este cel care va realiza ultimele lucrări ce ne vor permite să înaintăm pe această cale fără niciun pericol.

De aici înainte, matematicienii vor folosi din plin calculul infinitezimal şi vor începe să-şi pună o mulţime de întrebări care vizează lucruri aflate la mii de kilometri distanţă de aplicaţiile fizice originare. Căci dincolo de a fi un simplu instrument, teoria se va dovedi pasionantă în a dezghioca lucruri şi, în plus, extrem de frumoasă. Iar cum ştiinţa este o interminabilă partidă de ping-

pong, aceste noi descoperiri vor vorbi puţin câte puţin despre noile aplicaţii în alte câmpuri disciplinare decât acela al astronomiei.

Infinitezimalele vor fi puse la treabă în toate problemele care, precum traiectoria cometei, fac să intervină mărimi care variază continuu. Se foloseste în meteorologie pentru a modeliza şi prezice evoluţia temperaturii sau a presiunii atmosferice. în oceanografie se utilizează pentru a urmări curenţii marini. în aerodinamică, pentru controlul pătrunderii în atmosferă a unei aripi de avion sau a diferitelor navete spaţiale. în geologie, pentru a urmări evoluţia mantalei terestre si studierea vulca-

nilor, a cutremurelor sau, pe termen lung, a derivelor continentale.De-a lungul explorărilor, matematicienii vor descoperi în lumea infinitezimală o mulţime de rezultate ciudate dintre care unele îi vor pune în faţa unei intense perplexităţi.

Una dintre primele idei pe care le putem avea atunci când încercăm să definim un interval infinit de mic este acela de a ne fixa nişte puncte. însuşi Euclid a precizat acest lucru; un punct este cel mai mic element geometric care, având o lungime egală cu 0, este, de fapt, infinit de mic. Din păcate această idee mult prea simplă pentru a fi funcţională va fi lăsată deoparte. Pentru a înţelege de ce este aşa, priviţi acest segment de dreaptă care măsoară o unitate de lungime.

1

Segmentul este alcătuit dintr-o infinitate de puncte care are fiecare o lungime egală cu 0. Se pare că este posibil să se spună că lungimea intervalului este egală cu o infinitate de 0! Lucru care poate fi redat în limbajul algebric astfel: oo x 0 = 1, în care oo este simbolul pentru infinit. Problema acestei concluzii constă în aceea că, dacă se consideră acum un interval de lungime 2, şi acesta este alcătuit dintr-o infinitate de puncte, ceea ce ne va da de astă dată oo $_{x}$ 0 = 2. Cum este posibil ca un acelaşi calcul să aibă două rezultate diferite? Şi, făcând să varieze lungimea intervalului, se poate la fel de bine să obţinem că oo x 0 face 3, 1 000 sau chiar **ττ!**

Din această experienţă trebuie să tragem o concluzie: conceptele de zero şi de infinit utilizate în acest context nu sunt destul de precis definite pentru scopurile noastre. Un calcul precum acela al oo x 0, al cărui rezultat variază după interpretarea sa se numeşte „o formă indetermi- nată”. Este imposibil să folosim aceste forme în calculele algebrice fără să vedem imediat miile de paradoxuri care apar. Dacă ne-am permite înmulţirea lui oo x 0 ar trebui prin urmare să acceptăm şi că 1 este egal cu 2 şi alte aberaţii de felul acesta. Pe scurt, se impune să procedăm altfel.

Vom încerca să abordăm o altă cale, deoarece un interval infinitezimal nu poate fi un punct de sine stătător, ci un segment delimitat de două puncte distincte, dar infinit de apropiate. Ideea este seducătoare, însă încă o dată vom da peste o piatră de încercare, căci asemenea puncte nu există de fapt. Distanţa dintre două puncte poate fi oricât de mică am dori, dar ea va avea întotdeauna o lungime pozitivă. Un centimetru, un milimetru, o mi- liardime de milimetru sau şi mai mult dacă doriţi, toate aceste lungimi sunt, desigur, foarte mici, dar în niciun caz infinitezimale. Cu alte cuvinte, două puncte distincte nu se ating niciodată.

Acest enunţ are în el ceva extrem de derutant. Atunci când trasaţi o linie continuă, precum un segment, nu există locuri goale în acesta şi totuşi punctele care îl compun nu se ating. Niciun punct

nu se află în contact direct cu punctele învecinate. Absenţa găurilor din linie este datorată în mod unic acumulării infinite de puncte infinit de mici. Iar dacă se interpretează punctele dreptei prin coordonatele acestora, acelaşi fenomen poate fi tradus în termeni algebrici: două numere diferite nu-şi urmează niciodată unul altuia în mod direct; întotdeauna există o infinitate de alte numere care vor veni să se interpună între ele. între numerele 1 si 2 există 1.5. între nume- rele 1 şi 1,1 există 1,05, între numerele 1 şi 1,0001 există 1,00005. Am putea să continuăm mult timp în felul acesta. Numărul 1 — precum toate celelalte — nu are un succesor imediat lipit de el. Cu toate acestea, numerele se adună laolaltă în jurul lui în mod infinit, asigurând astfel continuitatea perfectă a lungii sale succesiuni.

După aceste două încercări nereuşite, trebuie să ne hotărâm să recunoaştem că numerele clasice, asa cum *t ′* erau ele definite până acum, nu sunt destul de puternice ca să dea naştere la cantităţi infinit de mici. Aceste specimene insesizabile care, fără a avea valoarea zero, sunt totuşi mai mici decât toate numerele pozitive vor trebui să fie create bucăţică cu bucăţică. Iată ce au făcut Lebniz şi oamenii de ştiinţă care i-au călcat pe urme în construirea calculului infinitezimal: de-a lungul a trei secole, ei s-au ocupat cu definirea regulilor calculului care se aplică acestor noi cantităţi şi s-au ocupat şi cu

delimitarea câmpului de acţiune al acestora. Astfel, ei vor produce între secolele al XVII-lea şi XX un întreg arsenal de teoreme care răspund cu o mare eficacitate la problemele puse de infinitezimale.

Astfel, există numere care nu sunt cu adevărat numere şi care se pot utiliza totuşi ca intermediare ale calculului? Acest caz începe de acum încolo să devină familiar. Numerele negative şi imaginare au trecut deja prin situaţia aceasta. Dar, ca de fiecare dată, procesul de asimilare este lung şi e greu să-i prezicem viitorul. în anul 1960, matematicianul american Abraham Robinson va crea un nou model, numit „analiza nonstandard", care integrează infinitezimalele ca numere de sine stătătoare. Totuşi, spre deosebire de numerele imaginare, la începutul secolului XXI, cantităţile infinitezimale încă nu au dobândit cu adevărat titlul de numere veritabile. Modelul non standard al lui Robinson rămâne destul de marginalizat şi puţin utilizat.

Poate că ar fi nevoie în continuare de noi descoperiri, evoluţii, de teoreme marcante pentru ca teoria nonstandard să se impună definitiv. Poate că, din contră, aceasta nu va avea niciodată potenţialul necesar pentru a deveni modelul dominant, iar în acest caz infinitezimalele nu vor fi puse niciodată pe picior de egalitate cu ilustrele sale predecesoare, numerele negative şi imaginare. Desigur, analiza nonstandard este frumoasă, dar poate că nu este suficientă şi încă nu are destul de multe beneficii pentru a trezi un entuziasm general. După doar câteva zeci de

ani de existentă, modelul lui Robinson rămâne tânăr si
este lăsat în seama matematicienilor din viitor să-i decidă soarta.

Printre dezvoltările cele mai fructuoase ale calculului infinitezimal, teoria măsurii, imaginată la începutul secolului XX de către francezul Henri-Léon Lebesgue, rămâne una dintre ramurile cele mai ciudate. De aceea se pune întrebarea: se pot imagina şi măsura cu ajutorul infinitezimalelor noi figuri geometrice rămase inaccesibile riglei şi compasului? Răspunsul este da, iar aceste figuri inedite vor ajunge cu uşurinţă în doar câţiva ani până la legile cele mai intuitive ale geometriei clasice.

Luaţi ca exemplu un segment gradat de la 0 la 10.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Si ' <p' 'n ' ' 728'

în maniera lui Descartes, această gradaţie ne permite să asociem fiecare punct al segmentului cu un număr cuprins între 0 şi 10. Pe acest segment se pot distinge, în cazul acesta, punctele care corespund unor numere care au o scriere zecimală finită (de exemplu, 0,1 sau 7,28), precum şi cele care au o infinitate de cifre după virgulă (precum n sau numărul de aur cp). Ce se întâmplă în cazul în care se decupează segmentul după acest criteriu? Cu alte cuvinte, dacă se colorează punctele din prima categorie prin îngroşare şi celelalte cu o nuanţă mai deschisă, cu ce vor semăna cele două

figuri geometrice astfel reprezentate, închisă şi deschisă la culoare?

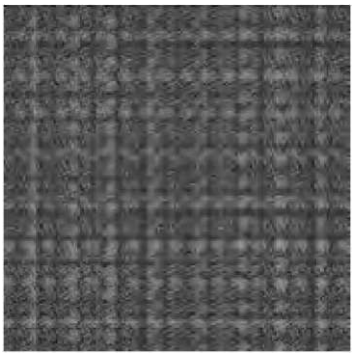
Nu este uşor să răspundem la această întrebare, căci aceste două categorii de numere se întretaie infinit. Dacă luaţi un interval de numere, oricât de mic, acesta va conţine întotdeauna atât puncte îngroşate, cât şi puncte deschise la culoare. între două puncte deschise la culoare, întotdeauna există cel puţin un punct îngroşat, iar între două puncte îngroşate există întotdeauna cel puţin un
0 12 3
punct deschis. Cele două figuri seamănă, aşadar, cu două linii de praf infinit de fine care se întrepătrund perfect.
5 6 7 B 9 10
72 Bttl
7JB
■nil ■ I HH-I
HSegmentul [0,10] se împarte în două: la stânga sunt numerele cu scriere zecimală finită şi la dreapta cele cu scriere zecimală infinită.

Sigur că reprezentarea de mai sus este eronată! Avem aici doar o reprezentare grosieră, deoarece detaliile pe care le vedem sunt foarte mici, dar nu sunt cu adevărat infinitezimale. Este imposibil să desenăm concret aceste figuri care nu pot fi corect înţelese decât prin algebră şi rationament.

în acest caz, se pune următoarea întrebare: cât măsoară aceste figuri? Deoarece segmentul de plecare are o lungime egală cu 10, aceste două figuri ar trebui să aibă aceeaşi lungime, dar cum se poate face decupajul? Au ele fiecare aceeaşi mărime de 5 sau una este mai lungă decât cealaltă?

Răspunsul pe care îl vor descoperi matematicienii care s-au aplecat asupra acestei probleme este uimitor. Absolut întreaga lungime este acaparată de figura alcătuită din numerele având o scriere infinită. Figura deschisă la culoare măsoară 10, iar figura închisă 0. Cu toate că cele două ansambluri par a fi egale în intersectarea lor, există infinit mai multe puncte deschise la culoare decât puncte închise.

Cu ajutorul coordonatelor lui Descartes, acest tip de figuri înceţoşate pot să se generalizeze şi la nivelul suprafeţelor şi volumelor. De exemplu, se poate lua în considerare ansamblul punctelor unui pătrat ale cărui două coordonate au o scriere infinită.



încă o dată, aceasta nu este decât o reprezentare grosieră care ne dă o vagă idee despre precizia infinită a detaliilor.

Măsurarea acestor figuri înceţoşate ne va conduce la unul dintre cele mai stupefiante rezultate din matematică, deoarece, în ciuda

tuturor eforturilor savanţilor care se vor apleca asupra problemei, unele dintre aceste figuri rămân imposibil de măsurat. Această imposibilitate a fost pusă în evidenţă în 1924 de Ştefan Banach şi Alfred Tarski, care vor descoperi un contraexemplu la principiul puzzle-ului.

Ei vor găsi un mijloc de a decupa o sferă în cinci bucăţi, în aşa fel încât aceste bucăţi reasamblate să permită construirea a două sfere perfect identice cu prima şi fără să existe nicio gaură.

^ ^

Cele cinci figuri intermediare pe care ei le utilizează sunt exact figuri înceţoşate cu decupaje infinitezimale. Dacă piesele puzzle-ului lui Banach-Tarski ar fi fost măsurabile, atunci suma acestor volume ar fi fost egală atât cu volumul sferei din care au luat naştere, cât şi cu volumul celor două sfere pe care le reconstituie. Acest lucru fiind imposibil, se impune o singură concluzie: noţiunea însăşi de volum nu are sens pentru aceste figuri.

De fapt, rezultatul lui Banach şi Tarski este mult mai spectaculos, deoarece afirmă că dacă luaţi două figuri geometrice clasice, în trei dimensiuni, este întotdeauna posibil să o decupaţi pe prima într-un anumit număr de piese înceţoşate care să permită reconstituirea celei de-a doua. De exemplu, este posibil să se decupeze o sferă având mărimea unui bob de mazăre în mai multe bucăţi şi să se poată reconstitui cu ajutorul acestor bucăţi o sferă având mărimea Soarelui fără să avem vreo gaură în

interiorul său! Acest decupaj este adesea denumit în mod fals paradoxul lui Banach-Tarski, din cauza aspectului său puternic contraintuitiv. Totuşi nu este vorba despre un paradox, ci despre o teoremă pe care o fac posibilă figurile înceţoşate fără ca raţionamentul să sufere vreo contradicţie.

Desigur, natura infinitezimală a acestor decupaje o fac absolut irealizabilă în mod concret. Figurile înceţoşate rămân până azi în depozitul curiozităţilor matematice care nu au aplicabilitate fizică. Cine ştie dacă într-o zi nu vor ieşi la iveală pentru a-şi găsi utilizări neaşteptate

17
?Măsurarea viitorului
Marsilia, 8 iunie 2012

în dimineaţa aceasta m-am trezit foarte devreme. Puţin nervos, dar arzând de nerăbdare, mi-am luat repede micul dejun, mi-am pus cea mai frumoasă dintre cămăşile pe care le am şi iată-mă ieşit din casă! Afară soarele se târăşte pe cerul provensal, iar răcoarea nopţii se risipeşte repede. Ziua se anunţă a fi caldă. în Vechiul Port, piaţa de peşte îşi deschide porţile, în timp ce câţiva turişti matinali se perindă deja pe Canebiere[1].

Dar astăzi nu am timp de plimbare! Cobor la metrou şi merg în direcţia cartierului Château-Gombert, spre nordul oraşului. Aici se află CMI, Centrul de
Matematică si Informatică unde muncesc de mai bine
/
de patru ani. De regulă, aici lucrează cam o sută de matematicieni. Ajungând în biroul meu, mai verific pentru o ultimă dată ce am de făcut. Am în faţă trei recipiente mari, semisferice, umplute cu bile multicolore şi, alături, un teanc de hârtii pe coperta cărora se pot citi următoarele:

Bulevardul principal al Marsiliei, de care marsiliezii sunt foarte mândri. *(N.r.)*

Urne interdependente TEZĂ
în vederea obţinerii titlului de doctor, specialitatea matematică, de Mickael Launay, sub coordonarea doamnei Vlada Limic

Astăzi este ultima mea zi la CMI. în după-amiaza aceasta, la ora 14, îmi voi susţine teza de doctorat.

Anii de doctorat reprezintă o perioadă atipică în viata unui om de stiintă. Doctoranzii sunt tot un fel de studenţi, totuşi nu mai merg la cursuri şi nici nu au examene trimestriale de dat. în realitate, zilele noastre seamănă foarte mult cu cele ale cercetătorilor cu normă întreagă. Trebuie să citim ultimele articole apărute, să discutăm cu alţi matematicieni, să participăm la seminare, apoi să ne străduim să punem umărul la progresul domeniului în care activăm, să emitem noi conjecturi, să elaborăm noi teoreme, să le demonstrăm şi să le redactăm. Toate acestea se petrec sub controlul unui matematician sever, însărcinat să ne ghideze primii paşi în lumea cercetării si să ne înveţe dedesubturile meseriei.

în ceea ce mă priveşte, coordonatorul meu de doctorat este matematiciana franco-croată Vlada Limic, specialistă în domeniul în care mi-am îndreptat cercetările de-a lungul acestor patru ani. Lucrările sale şi ale mele se înscriu în cadrul unei ramuri ale matematicii care a apărut la mijlocul secolului al XVII-lea; este vorba despre probabilităţi.

Pentru a înţelege mizele acestei discipline, trebuie să ne întoarcem din nou în istorie. în timp

ce aşteptăm ora 14, haideţi să ieşim câteva momente din CMI şi permiteţi-mi să vă conduc pe cărările riscante ale aleatoriului.

Hazardul îi fascinează pe oameni de mult timp. încă din preistorie ei au observat multitudinea de fenomene inexplicabile, neregulate, fără nicio cauză aparentă, pe care le arăta natura. într-un prim moment şi din lipsă de altceva, au fost puse pe seama zeilor. Eclipsele, curcube- iele, cutremurele, epidemiile, inundaţiile rare ale fluviilor sau cometele reprezintă tot atâtea manifestări care au fost interpretate drept mesaje divine adresate celor care stiu să le descifreze. Sarcina aceasta a fost atribuită

/

vrăjitorilor, oracolelor, preoţilor sau altor şamani care, pentru că trebuiau să-şi câştige traiul cumva, au creat o întreagă panoplie de ritualuri destinate să-i interogheze pe zei, fără să aştepte ca aceştia să se încumete să se arate. Cu alte cuvinte, oamenii s-au apucat să imagineze mijloace de a crea aleatoriul la comandă.

Belomanţia sau arta divinaţiei cu ajutorul săgeţilor reprezintă una dintre cele mai vechi astfel de tehnici. Scrieţi pe săgeţi diferitele opţiuni din QCM-ul[I] pe care îl adresaţi zeului ales, puneţi-le într-o tolbă, scuturaţi-o şi luaţi o săgeată la întâmplare. Aveţi astfel răspunsul! De

I QMC = Questionnaire â Choix Multiple; chestionar cu variante de răspuns. *(N.r.)*

Consiliul cetăţenesc, la grecii antici. *(N.r.)*

exemplu, aşa îşi alegea Nabucodonosor al II-lea, rege al
Babilonului, duşmanii cărora le declara război în secolul al VI-lea înaintea erei noastre. în afară de săgeţi, obiectele extrase puteau fi de alte forme: pietricele, tăbliţe, baghete sau bile colorate. Romanii au dat acestor obiecte numele de „sorţi". Din acest termen provine expresia „a trage la sorţi", dar şi cuvântul în franceză „*sortilège*" (vrajă, vrăjire) care la origine îl desemnează fie pe ghicitorul care pune întrebări zeilor, fie verdictul zeului însuşi.

Puţin câte puţin, mecanismele de extragere aleatorie se vor multiplica şi îşi vor găsi numeroase aplicaţii. Mai multe sisteme politice le utilizează; astfel se petreceau lucrurile la Atena pentru desemnarea celor cinci sute de cetăţeni din Bule[1] sau, câteva secole mai târziu, la Veneţia, în procesul de desemnare a dogelui. Hazardul se va dovedi a fi una dintre marile surse de inspiraţie pentru creatorii de jocuri. Aşa au apărut aruncarea monedei (jocul „cap sau pajură"), zarurile numerotate ale căror forme vor fi împrumutate de la solidele lui Platon sau chiar jocurile de cărţi.

în cele din urmă zeii vor decide tocmai prin jocurile de noroc să atragă atenţia câtorva matematicieni.
Aceştia din urmă vor avea ideea stranie de a cerceta cum

se măsoară destinul, căutând cu ajutorul logicii şi al calculului proprietăţile viitorului, înainte ca acesta să se realizeze.

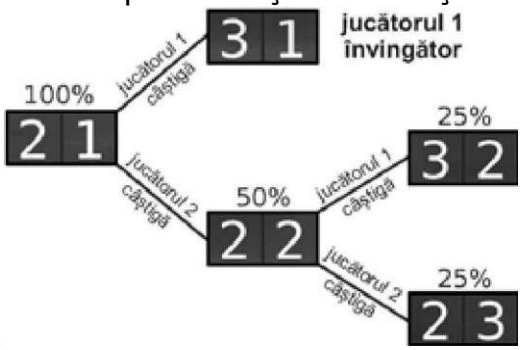
Totul a început la mijlocul secolului al XVII-lea, în timpul unei şedinţe care avea loc la Academia din Paris, strămoasa Academiei de Stiinte create în 1635 de matematicianul si filosoful Marin Mersenne.

în timpul unei discuţii între oamenii de ştiinţă din diferite domenii, scriitorul Antoine Gombaud, matematician amator în timpul liber, propune adunării o problemă la care lucra. Imaginaţi-vă, spunea el, că doi jucători şi-au pus o anumită sumă de bani într-un joc de noroc alcătuit din trei runde câştigătoare, dar că partida s-a întrerupt în momentul în care primul jucător conducea cu doi la unu la runde. Cum ar trebui să-şi împartă miza cei doi jucători înainte de a se despărţi?

Dintre savanţii prezenţi în acea zi, problema îi atrage în mod special pe doi, şi anume: Pierre de Fermat şi Blaise Pascal. După câteva schimburi epistolare, ei vor ajunge la concluzia că trei sferturi din miză ar trebui să revină primului jucător şi un sfert celui de-al doilea.

Pentru a ajunge la acest răspuns, cei doi savanţi vor trece în revistă ansamblul de scenarii după care s-ar fi putut desfăşura partida dacă ea s-ar fi terminat, evaluând în acelaşi timp şansele de câştig ale fiecăruia dintre jucători.

Astfel, în următoarea rundă ipotetică, primul jucător ar fi avut 50% şanse să câştige partida, în timp ce al doilea jucător ar fi avut 50% şanse să revină la egalitate, iar în această eventualitate o nouă rundă ar fi fost jucată cu tot atât de multe şanse de câştig pentru cei doi jucători, ceea ce ne oferă astfel două scenarii, având fiecare 25% şanse de reuşită. Acest raţionament poate fi tradus prin graficul următor, care rezumă diferitele posibilităţi de desfăşurare



a partidei.
jucătorul 1 învingător
jucătorul 2 **învingător**

Pe scurt, se constată că 75% din viitorul posibil conduce la victoria primului jucător, în timp ce al doilea
are doar 25% sanse. Aşadar, concluzia lui Pascal si a lui
; / ' /
Fermat împarte banii aflaţi în joc conform acestor proporţii: ar fi corect ca primul jucător să păstreze 75% din

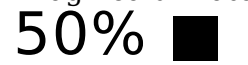
mică, iar cel de-al doilea cei 25% rămaşi.

Raţionamentul celor doi savanţi francezi se va dovedi extrem de fecund. Cele mai multe jocuri de noroc pot constitui obiectul acestui tip de examinare. Matematicianul elveţian Jacques Bernoulli a fost unul dintre primii care le-a urmat exemplul şi a redactat la sfârşitul secolului al XVII-lea o lucrare intitulată *Ars Conjectandi* sau *Arta de a presupune*, care nu va fi publicată decât în 1713, după moartea sa. în această carte el reia analiza jocurilor de noroc clasice şi enunţă pentru prima oară unul dintre principiile fundamentale ale teoriei probabilităţilor: legea numerelor mari.

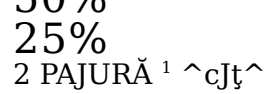
Această lege afirmă următoarele: cu cât se repetă o experienţă aleatorie de un număr mai mare de ori, cu atât media rezultatelor va fi mai previzibilă şi se va apropia de o valoare-limită. Cu alte cuvinte, chiar şi cel mai complex hazard sfârşeşte, în timp, prin a da naştere unor comportamente medii care nu mai au nimic aleatoriu în ele.

Pentru a înţelege acest fenomen nu trebuie să mergem prea departe. Simpla observare a unui joc de tipul cap sau pajură ne permite să vedem cum apare legea numerelor mari. Dacă aruncăm în aer o monedă bine echilibrată, fiecare dintre cele două fete va avea 50%

şanse să cadă, lucru ce poate fi reprezentat prin imaginea următoare:



Imaginaţi-vă acum că aruncaţi o monedă de două ori la rând şi că număraţi de câte ori pică o faţă sau alta. în acest caz avem trei posibilităţi: fie pică de două ori cap, fie de două ori pajură, fie o dată cap şi o dată pajură. Ar fi tentant să gândim că aceste trei eventualităţi vor apărea în proporţii egale, dar lucrurile nu se petrec aşa. în realitate există 50% şanse să obţinem un cap şi o pajură, în timp ce probabilităţile de a obţine două capete sau două pajuri sunt de 25% fiecare.



Acest dezechilibru este provocat de faptul că două aruncări diferite pot să dea acelaşi rezultat final. Atunci când aruncaţi de două ori moneda, în realitate există patru scenarii posibile: cap - cap, cap - pajură, pajură - cap, pajură - pajură. Scenariile cap - pajură şi pajură - cap dau acelaşi rezultat final de un cap şi o pajură, ceea ce explică faptul că această eventualitate este de două ori mai probabilă. în acelaşi fel, jucătorii ştiu prea bine că, dacă se aruncă două zaruri, suma lor are mai mari şanse să fie egală cu 7 decât cu 12, deoarece există mai multe modalităţi de a obţine 7, respectiv: (1+6; 2+5; 3+4; 4+3;

5+2 şi 6+1), în timp ce nu există decât una pentru a obţine 12, anume: (6+6).

Cu cât creştem numărul de aruncări, cu atât fenomenul se accentuează. Scenariile care se îndepărtează de medie devin puţin câte puţin ultraminoritare faţă de scenariile medii. Dacă aruncaţi o monedă de zece ori, aveţi

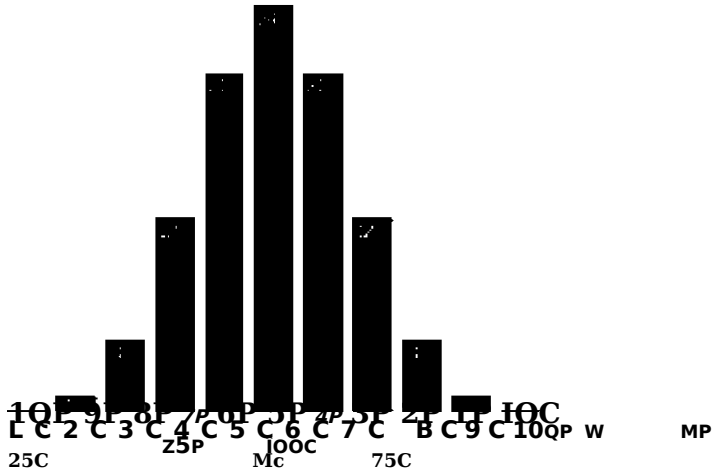
t

66% şanse să pice pajura între 4 şi 6 ori. Dacă aruncaţi aceeaşi monedă de o sută de ori, veti avea 96% sanse să pice pajura între 40 şi 60 ori, iar dacă aruncaţi de o mie de ori veţi avea 99,99999998% şanse să pice pajura între 400 si 600 de ori.

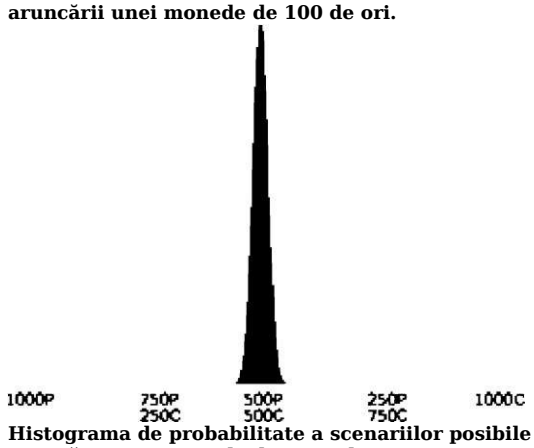
Dacă reprezentăm histograma corespunzătoare pentru 10, 100 şi 1 000 de aruncări se observă foarte bine că, puţin câte puţin, majoritatea posibilităţilor viitoare se restrânge în jurul axei centrale, iar imaginile corespunzătoare situatiilor extreme devin din ce în ce mai invizibile /

Histograma de probabilitate a scenariilor posibile în cazul aruncării unei monede de 10 ori.

cu ochiul liber.



Histograma de probabilitate a scenariilor posibile în cazul aruncării unei monede de 100 de ori.



Histograma de probabilitate a scenariilor posibile în cazul aruncării unei monede de 1000 de ori

.Pe scurt, iată ce spune legea numerelor mari: repetând nedefinit o experienţă aleatorie, media rezultatelor obţinute se va apropia inevitabil de o valoare-limită care nu mai are nimic aleatoriu în ea.

Acest principiu stă la baza funcţionării sondajelor şi a altor statistici. Luaţi 1 000 de persoane dintr-o populaţie şi întrebaţi-le dacă preferă ciocolata neagră sau cea cu lapte. Dacă 600 vă răspund că neagră şi 400 cu lapte, aveţi toate şansele ca în întreaga populaţie, chiar dacă este alcătuită din milioane de indivizi, să găsim aceeaşi proporţie apropiată de 60% care preferă ciocolata neagră şi 40% care preferă ciocolata cu lapte. A întreba o persoană luată la întâmplare despre gusturile sale poate fi considerată o experienţă aleatorie în acelaşi fel în care putem arunca o monedă. Opţiunile cap şi pajură sunt înlocuite de „ciocolata neagră" şi „ciocolata cu lapte".

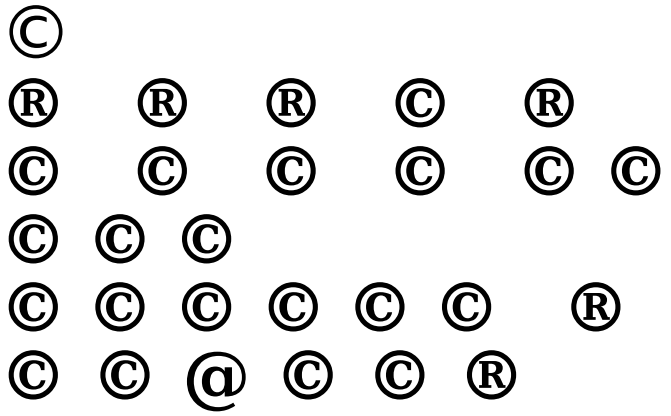
Bineînţeles că ar fi posibil să avem nenorocul să dăm peste 1 000 de persoane cărora le place numai ciocolata neagră sau peste 1 000 de persoane cărora le place numai ciocolata cu lapte, dar aceste scenarii extreme au o şansă infimă de a se realiza, iar legea numerelor mari ne asigură că, întrebând un eşantion suficient de mare, media obţinută are foarte mari şanse să se apropie de media populaţiei luată ca întreg.

împingând şi mai departe decriptarea multiplelor scenarii şi a şanselor acestora de a se realiza este, de asemenea, posibil să stabilim un interval de încredere şi să estimăm riscul de eroare. De exemplu, se va putea spune că există 95% şanse pentru ca proporţia populaţiei care preferă ciocolata neagră să se găsească între

57% şi 63%. De altfel, orice sondaj realizat în mod cinstit ar trebui să fie mereu însoţit de cifrele care indică precizia şi fiabilitatea sa.

Triunghiul lui Pascal

în 1654, Blaise Pascal publică o lucrare intitulată *Tratat despre triunghiul aritmetic.* El descrie aici un triunghi alcătuit din cercuri în interiorul cărora sunt
înscrise diferite numere.



Aici am reprezentat doar primele şapte linii, dar triunghiul se poate prelungi la infinit. Numerele care se găsesc în cercuri sunt determinate de două reguli. în primul rând, cercurile aflate pe margini nu conţin decât cifra 1. în al doilea rând, cercurile din interior conţin suma altor două care se găsesc imediat deasupra lor. De exemplu, numărul 6 care se află pe cea de-a cincea linie se obţine prin adunarea celor doi 3 care se găsesc deasupra sa.

De fapt, acest triunghi era deja cunoscut cu mult înainte ca Pascal să se aplece asupra lui. Matematicienii persani Al-Karaji şi Omar Khayyam îl aminteau încă din secolul al Xl-lea. în aceeaşi epocă, el era studiat în China de către Jia Xian ale cărui lucrări vor fi completate în secolul al XlII-lea de către Yang Hui. în Europa, Tartaglia şi Viete aveau şi ei cunoştinţă de existenţa lui. Cu toate acestea, Blaise Pascal este primul care i-a consacrat un tratat atât de detaliat şi complet. Totodată, el este şi primul care a descoperit existenţa unei strânse legături între triunghi şi calculul probabilităţilor.

De fapt, fiecare linie a triunghiului lui Pascal ne permite să calculăm numărul de scenarii posibile ale unei succesiuni de evenimente având două variante, precum în cazul monedei. Dacă aruncaţi o astfel de monedă de trei ori la rând, există posibilitatea de a obţine opt variante: pajură - pajură - pajură, pajură - pajură - cap, pajură - cap - pajură, pajură - cap - cap, cap - pajură - pajură, cap - pajură - cap, cap - cap - pajură şi cap - cap - cap. Dacă tragem linie, vom observa că din aceste opt variante vom obţine:

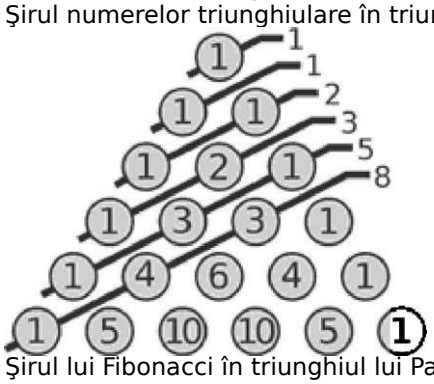
- 1 scenariu în care obţinem de trei ori pajură;
- 3 scenarii în care obţinem de două ori pajură şi o dată cap;
- 3 scenarii în care obţinem o pajură şi de două ori cap;
- 1 scenariu în care obţinem de trei ori cap.

Dar această secvenţă de numere, 1 - 3 - 3 - 1 corespunde exact celei de-a patra linii a triunghiului. Acest lucru nu e o întâmplare şi tocmai asta a reuşit Pascal să demonstreze.
De exemplu, dacă privim la cel de-al şaselea rând, este posibil să vedem că, aruncând de cinci ori moneda, există 10 scenarii în care vom avea de 2 ori pajură şi de 3 ori cap. Mergând mai departe în triunghiul nostru, va fi posibil să calculăm cu uşurinţă rezultatele scenariilor în care aruncăm de zece ori moneda (acest lucru îl vedem în cel de-al unsprezecelea rând din triunghi). O sută de aruncări pot fi observate la rândul 101 şi aşa mai departe. De altfel, cu ajutorul triunghiului lui Pascal au putut fi găsite cu uşurinţă histogramele prezentate mai înainte. Fără acesta, numărul de posibilităţi devine atât de mare, încât va fi repede imposibil să le listăm pe toate în mod individual.
Dincolo de probabilităţi, triunghiul lui Pascal îşi va arăta numeroasele legături pe care le are cu alte domenii din matematică. De exemplu, numerele care se găsesc în acest triunghi sunt de o mare utilitate în calculele algebrice care ne permit rezolvarea unor ecuaţii. Astfel, se pot regăsi în cercurile sale mai multe şiruri de numere foarte cunoscute, precum numerele triunghiulare (1, 3, 6, 10...) pe una dintre diagonalele sale, sau chiar şirul lui Fibonacci (1, 1, 2, 3,

5, 8...), făcând adunarea termenilor de-a lungul dreptelor paralele înclinate

.<D
v® ®
® (D ® ® C3)(D ©
® © C6) © ®
© © © ^(D ®

Şirul numerelor triunghiulare în triunghiul lui Pascal



Şirul lui Fibonacci în triunghiul lui Pascal

în secolele care vor urma, teoria probabilităţilor va crea instrumente din ce în ce mai rafinate şi puternice pentru a analiza ansamblul de posibilităţi ce pot apărea. în curând, o strânsă şi fructuoasă colaborare se va realiza cu calculul infinitezimal. De fapt, multe fenomene aleatorii produc posibilităţi care pot suporta variaţii infinit de mici. De exemplu, într-un model meteorologic, temperatura variază în mod continuu. Aşa cum un segment are o lungime anume, cu toate că punctele care îl compun nu au dimensiune, tot aşa anumite evenimente

pot să apară, deşi fiecare dintre posibilităţile care compun fenomenul meteo nu are nicio sansă de a se realiza efectiv în mod individual. Probabilitatea ca în timpul unei săptămâni să avem exact 23,41 de grade sau oricare altă temperatură exactă este egală cu 0. Totuşi, probabilitatea globală pentru ca temperatura să fie cuprinsă între 0° şi 40° este în mod sigur reală!

O altă miză a teoriei probabilităţilor a fost aceea de a înţelege comportamentul sistemelor aleatorii capabile de a se modifica pe sine. O monedă rămâne mereu aceeaşi, fie că am aruncat-o o dată sau de o mie de ori. Dar multe situaţii din realitate nu sunt atât de simple. în 1930, matematicianul ungur George Polya va publica un articol în care încearcă să înţeleagă cum se propagă o epidemie în sânul unei populaţii. Subtilitatea acestui model reiese din faptul că o epidemie se propagă mai repede atunci când un mare număr de persoane a fost deja atins de ea.

Dacă există mulţi bolnavi în anturajul dumneavoastră, aveţi mai multe sanse să vă îmbolnăviţi. Iar dacă vă *';/t* îmbolnăviţi, chiar dumneavoastră sunteti un element *;'t* care contribuie la creşterea riscurilor pentru persoanele care vă înconjoară. Pe scurt, procesul se autoalimentează, iar probabilităţile sunt în evoluţie permanentă. Acest fenomen poartă numele de „şansă crescută”.

Procesele aleatorii care prezintă şanse crescute vor cunoaşte în continuare numeroase variante şi multiple aplicaţii. Una dintre cele mai rodnice utilizări s-a dovedit a fi în dinamica populaţiilor. Luaţi o populaţie de animale căreia doriţi să-i urmăriţi evoluţia trăsăturilor biologice sau genetice de-a lungul generaţiilor. De exemplu, ima- ginaţi-vă că 60% din indivizii săi au ochii negri, iar 40% au ochii albaştri. în acest caz, prin ereditate, noii indivizi care se nasc au 60% şanse de a avea ochii negri şi 40% de a avea ochii albaştri. Deci, evoluţia culorii ochilor în această populaţie are o dinamică asemănătoare cu propagarea unei epidemii: cu cât există mai mulţi indivizi care au o anumită culoare a ochilor, cu atât această culoare va avea mai multe şanse de a apărea din nou, deci proporţia sa poate creşte. Spunem că procesul se autoalimentează.

Astfel, studiul modelului lui Polya ne permite să evaluăm probabilităţile evoluţiei diferitelor particularităţi biologice ale speciilor. Unele dintre acestea pot ajunge chiar la dispariţie, altele, din contra, se pot impune în ansamblul populaţiei, iar altele se instalează într-un echilibru intermediar şi nu suferă decât mici variaţii de-a lungul generaţiilor. Este imposibil să ştim dinainte care dintre aceste scenarii se va produce, dar, precum în cazul jocului cu moneda, probabilităţile ne permit să distingem posibilităţile majoritare şi să prevedem cele mai probabile evoluţii pe termen lung.

Atunci când George Polya a murit, în 1985, aveam aproape un an. Aşadar, mi se poate permite să spun că am fost contemporan - timp de câteva luni - cu cel care a iniţiat teoria în care urma să lucrez şi să descopăr mai multe teoreme.

Fără a intra prea mult în detalii, rezultatele mele privesc evoluţia mai multor procese aleatorii având şanse crescute, care interacţionează ocazional unele cu altele. De exemplu, imaginaţi-vă mai multe turme dintr-o aceeaşi specie, care trăiesc separat pe acelaşi teritoriu, dar care din când în când permit migrarea câtorva indivizi dintr-un grup în altul. Ce posibilităţi există şi cum le putem calcula probabilităţile? Iată întrebări cărora cercetările mele le-au adus câteva răspunsuri.

Bineînţeles că teoremele mele sunt modeste şi ar fi îndrăzneţ să le menţionez printre cele din această mare istorie cu atât de multe nume mari. Cred că, dacă am fost un cercetător onest care si-a făcut în mod corect treaba de-a lungul celor patru ani de teză, descoperirile mele au totuşi o importanţă derizorie în comparaţie cu cele ale altor numeroşi matematicieni, cu mult mai buni decât mine. Dar ele au fost suficiente pentru a convinge juriul în faţa căruia le-am expus de-a lungul unei întregi ore în această zi de 8 iunie 2012, iar oamenii aceştia mi-au acordat titlul de doctor.

Este destul de emoţionant să intri, prin această ceremonie, în talazurile unei istorii atât

de prestigioase. Cuvântul „doctor” vine din latinescul *docere* care înseamnă „a preda”. Aşadar, doctorul este cel care a deprins o îndemânare suficientă a unui subiect pentru a-l putea transmite la rândul său. De la sfârşitul Evului Mediu, universităţile care sunt urmaşele moderne ale Museionului din Alexandria sau al Bayt al-Hikma din Bagdad eliberează doctorate si oferă cercetării si predării stiintifice un *; ; ± t t* cadru instituţional stabil şi durabil.

De atunci, ştiinţele au început o mişcare care vede, secol după secol, cum se succed cercetători, profesori şi elevi într-un cerc cvasipermanent de generaţii. Un lucru amuzant este că, odată cu această succesiune, este posibil să vedem cum a evoluat lumea academică a oamenilor de ştiinţă. Aşa cum coordonatoarea mea este matematiciana Vlada Limic, ea însăşi l-a avut ca îndrumător câţiva ani mai înainte pe probabilistul britanic David Aldous. Şi putem continua aşa mult timp. Astfel, mergând de la discipol la maestru, este posibil să retrasăm „genealogia” completă a unui matematician. Iată, mai jos, arborele meu care ajunge în secolul al XVI-lea, trecând prin mai mult de douăzeci de generaţii.

jViafojL'iWlOl ţPwuj airiyu*”' {¡ 3 j . ' • « r j
-, Ki^jljW^jterifr CÂijfjvşJtijo l *La**)* ¡î (jSeanpe't-ij
l^r^try'
(¿ÎT-l ***Jvi*** ¡1 fr^T 'Şjhi.nl^-'l
ijr»-. rTjqhjj ţjThnrna* LEfotoBl Ifltartl^il
{jjiPX^ g^Htjà^l
ţi***” *'Mil&n*}*

.....,.....■.» u* ¿h^t^J *{Vmaxy* Vfr^gfy
^■■ËHpjMIC^
ÎLTiirg-iç [r] **itfr* l)
¡Mtmm < Vtng

Deci, cel mai îndepărtat strămoş al meu este matematicianul Niccolo Tartaglia, pe care l-am întâlnit deja. Este imposibil să mergem mai departe în timp, deoarece savantul italian a fost un autodidact. El s-a născut în- tr-o familie săracă, iar legenda spune chiar că tânărul Tartaglia a fost nevoit să fure din şcoala sa cărţile din care a învătat matematica.

în această genealogie îi veţi întâlni şi pe Galilei şi pe Newton, care nu mai au nevoie de nicio prezentare, într-un colţ îl vedeţi pe Marin Mersenne, cel care a creat Academia din Paris, acolo unde a luat naştere teoria probabilităţilor. Elevul său, Gilles Personne de Roberval, este inventatorul balanţei cu două braţe care îi poartă numele. Puţin mai departe, observaţi că astronomul George Darwin este fiul naturalistului Charles Darwin, părintele teoriei evoluţioniste. Nu există nimic special în a întâlni asemenea personaje în acest arbore; cei mai mulţi dintre matematicienii a căror genealogie merge destul de departe ajung să aibă în ea nume mari. De altfel, trebuie să precizăm că această figură nu reprezintă decât strămoşii mei direcţi şi ignoră numeroşii mei „veri”. Astăzi, Tartaglia are mai mult de treisprezece mii de

descendenţi, iar numărul lor continuă să crească în fiecare an

17
.Apariţia maşinilor

Staţia de metrou *Arts et Métiers (Arte şi meserii)* este una dintre cele mai ciudate din Paris. Călătorul care coboară se găseşte deodată ca înghiţit în burta de cupru a unui imens submarin. Mari angrenaje roşietice ies din plafon şi zeci de hublouri se aliniază pe margini. Aruncaţi un ochi prin acestea şi veţi descoperi nişte schiţe neobişnuite care reprezintă diferite invenţii vechi şi inedite. Angrenaje eliptice, un astrolab sferic şi roţi hidraulice stau alături de un dirijabil sau de un convertor siderurgic de oţel. Fără mulţimea continuă a parizienilor grăbiţi, care se precipită şi ies de niciunde fără încetare pe culoarele subterane, abia dacă am putea să ne imaginăm cum ar apărea în faţa noastră figura impozantă a căpitanului Nemo ieşind direct din romanul lui Jules Verne.

Totuşi decorul de la metrou nu reprezintă decât o introducere a ceea ce ne aşteaptă la suprafaţă. Astăzi mă îndrept spre Conservatorul Naţional de Arte şi Meserii, sau CNAM, al cărui muzeu prezintă una dintre cele mai importante colecţii de maşinării vechi, de tot felul. De la primele maşini motorizate la telegraful cu cadran, trecând prin manometrele cu piston, orologiile olandeze automate, pilele voltaice, războaiele de ţesut cu cartele perforate, presele de tipografie cu şurub sau barometrele cu sifon,

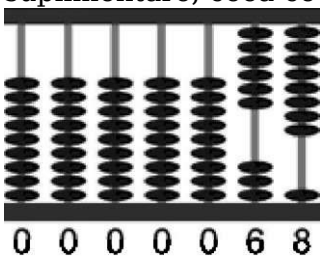
toate aceste invenţii venind din trecut mă poartă într-un ameţitor vârtej tehnologic din ultimele patru secole. Suspendat deasupra scării principale stă un aeroplan din secolul al XlX-lea, având aripi imense
de liliac. în coltul unui culoar iată-mă în fata lui Lama,
; t '
primul robot imaginat de savanţii ruşi în secolul XX, conceput pentru a se deplasa pe suprafaţa planetei Marte.

Trec repede prin faţa acestor obiecte fabuloase şi mă îndrept direct spre etajul al doilea al clădirii. Aici se găseşte galeria instrumentelor ştiinţifice. Iată lunete astronomice, clepsidre, busole, balanţele lui Roberval, termometre gigantice şi minunate globuri astronomice care se învârt în jurul axelor proprii. Iar apoi, deodată, în colţul unei vitrine observ obiectul pentru care am venit aici: pascalina. Această maşină ciudată se prezintă sub forma unei lădiţe de alamă de 40 centimetri lungime pe 20 centimetri lăţime, pe suprafaţa căreia sunt fixate şase rotiţe numerotate. Acest mecanism a fost imaginat în 1642 de Blaise Pascal care avea atunci doar 19 ani. Am în faţa ochilor prima maşină de calcul din istorie.

Prima? Pentru a fi corect, au mai existat dispozitive care permiteau efectuarea de calcule cu mult înainte de secolul al XVII-lea. într-un anume fel, degetele au fost cele care au

reprezentat primul calculator din toate timpurile, iar *Homo sapiens* a utilizat încă de foarte devreme diferite accesorii pentru a număra. Osul Isangho şi tăieturile sale, jetoanele de argilă din Uruk, beţigaşele chinezilor antici sau abacele care au cunoscut un imens succes încă din Antichitate, toate aceste instrumente au servit drept suport pentru numărare şi calcul. Totuşi, niciunul dintre acestea nu intră sub definiţia care se dă în general maşinilor de calcul.

Pentru a o înţelege, să ne aplecăm câteva momente asupra ei şi să intrăm în detalii cu privire la funcţionarea unui abac clasic. Obiectul este alcătuit din mai multe tije pe care culisează nişte biluţe găurite. Prima tijă corespunde unităţilor, a doua zecilor, a treia sutelor şi aşa mai departe. Astfel, dacă doriţi să scrieţi numărul 23, împingeţi două bile din coloana zecilor şi trei din cea a unităţilor. Dacă doriţi să-i adăugaţi 45, separaţi patru de pe tija zecilor şi cinci unităţi suplimentare, ceea ce dă 68.



în schimb, dacă adunarea prezintă un element ce trebuie ţinut minte, se impune să facem un mic artificiu suplimentar. Pentru a adăuga 5 la 68

nu ne mai rămâne decât o bilă disponibilă pe tija unităţilor. în acest caz, odată ce am ajuns la 9, trebuie să coborâm toate bilele pentru a continua unităţile începând de la 0, adăugând în acelaşi timp o bilă în coloana zecilor. Veţi obţine astfel 73.Această operaţiune nu este complicată şi totuşi ea este cea care va împiedica abacul, precum şi toate mecanismele care au precedat pascalina, să capete numele de maşină de calcul. Pentru a efectua aceeaşi operaţie, utilizatorul nu face acelaşi gest în funcţie de prezenţa sau absenţa unui
element care trebuie tinut minte. în realitate, maşina nu
este decât un ajutor pentru memorie, care-i aduce aminte omului unde se află acesta, dar îi lasă întotdeauna sarcina de a efectua cu mâna diferitele etape ale calculului. Or, atunci când efectuaţi o adunare pe un calculator modern, nu vă preocupă absolut deloc modul în care maşina găseste rezultatul. Pot să existe sau nu elemente de tinut
minte, acest lucru nu vă interesează. Nu mai este nevoie să gândiţi sau să vă adaptaţi la situaţie, căci aparatul se ocupă de toate aceste lucruri.

Urmând acest criteriu, pascalina este în adevăratul sens al cuvântului prima maşină de calcul din istorie. Deşi mecanismul este foarte

precis şi necesită o mare abilitate din partea constructorului său, principiul de funcţionare rămâne destul de simplu. Deasupra maşinii se găsesc şase rotiţe cu zece dinţi numerotaţi.

Prima roată de la dreapta reprezintă cifra unităţilor, a doua cifra zecilor şi aşa mai departe. Deasupra roţilor se găseşte o zonă de afişaj alcătuită din şase pătrăţele, unul pentru fiecare rotiţă, indicând fiecare o cifră. Pentru a scrie numărul 28, răsuciţi rotiţa zecilor cu doi dinţi în sensul acelor de ceasornic şi pe cea a unităţilor cu opt dinţi. Printr-un sistem intern de angrenaje, veţi vedea cum apar cifrele 2 şi 8 în cele două căsuţe corespunzătoare, iar dacă acum doriţi să adăugaţi 5 la acest număr,
nu mai este nevoie să tineti minte un element: răsuciţi
/; t
în continuare rotita unităţilor cu cinci dinţi, iar în mo-
/; t '
mentul în care aceasta va trece de la 9 la 0, cifra zecilor
va trece automat de la 2 la 3. Maşina va afişa acum 33.
/

Iar acest lucru funcţionează indiferent de câte ele- mente de ţinut minte aveţi. Afişaţi 99 999 pe pascalină, apoi răsuciţi rotiţa unităţilor cu un dinte. Veţi vedea toate elementele de ţinut minte cum se propagă în cascadă spre stânga pentru a face să apară numărul 100 000 fără ca utilizatorul să fi făcut vreun alt gest.

După Pascal, mulţi inventatori vor perfecţiona maşina acestuia pentru a putea face din ce în ce mai multe operaţii într-o manieră mai rapidă şi mai eficace. La sfârşitul secolului al XVII-lea, Leibniz a fost unul dintre primii care a îmbunătăţit substanţial maşina imaginând un mecanism care ne permite să efectuăm mai simplu înmulţiri şi împărţiri. Sistemul lui rămâne totuşi incomplet, iar maşinile pe care le-a fabricat produc încă erori din cauza elementelor care trebuie ţinute minte în anumite cazuri particulare. Va trebui să aşteptăm secolul al XVIII-lea pentru ca ideile să fie pe deplin puse în ordine. Acum vor apărea numeroase prototipuri mult mai fiabile şi performante sub impulsul inventatorilor din ce în ce mai ingenioşi şi imaginativi. Complexitatea mecanismelor se face totuşi cu preţul taliei maşinilor care, din obiecte de dimensiuni modeste, devin câteodată adevărate obiecte de mobilier.

în secolul al XIX-lea, maşinile de calcul se demo-
't
cratizează şi cunosc o răspândire asemănătoare cu cea a
rudelor acestora, maşinile de scris. Numeroase birouri de
't
contabilitate, oameni de afaceri sau pur şi simplu comercianţi se dotează cu aceste calculatoare care se integrează în decor şi reuşesc rapid să se

facă indispensabile. Oamenii se întreabă cum s-a putut trăi fără ele până acum.

Mergând mai departe în vizita mea la muzeu, întâlnesc mai mulţi urmaşi ai pascalinei. Există aici aritmometrul lui Thomas de Colmar, maşina de înmultit a lui Léon Bollée, aritmograful policrom al lui Du Bois, sau *comptometrul* lui Felt si Tarrant. Unul dintre mecanismele care a cunoscut cel mai mare succes a fost aritmometrul pus la punct în Rusia de inginerul suedez Willgodt Theophil Odhner. Această maşină este alcătuită din trei elemente principale: partea înaltă, pe care se arată cu ajutorul unor manete numărul cu care dorim să operăm, partea de jos, alcătuită dintr-un cărucior care se deplasează pe orizontală şi pe care se afişează rezultatul operaţiei şi, la dreapta, manivela care permite să se efectueze operaţia.

La fiecare tur de manivelă, numărul indicat în partea de sus se adună cu numărul deja afişat în

căruciorul de jos. Pentru a face o scădere, răsuciţi manivela în celălalt sens. Imaginaţi-vă acum că doriţi să efectuaţi înmulţirea 374 x 523. Alcătuiţi numărul 374 în partea de sus şi răsuciţi manivela de trei ori. Partea de jos va afişa în acest caz 1 122, adică rezultatul operaţiei 374 x 3. Mişcaţi acum căruciorul de afişaj cu un dinte în direcţia zecilor şi răsuciţi de două ori manivela. Se va afişa numărul 8 602 care corespunde
înmulţirii lui 374 cu 23. Decalaţi din nou căruciorul cu
un dinte pentru a trece la căsuţa sutelor, răsuciţi de cinci ori manivela si iată rezultatul dumneavoastră: 195 602. Dacă vă obişnuiţi puţin si vă antrenati, nu veti avea nevoie
decât de câteva secunde pentru a efectua înmulţirea.

în 1834, o idee care era cel puţin bizară i-a trecut prin minte matematicianului britanic Charles Babbage:
aceea de a încrucişa o maşină de calcul cu un război de
tesut. De câţiva ani, funcţionarea războaielor de tesut cu-
noscuse mai multe îmbunătăţiri. Una dintre ele consta în introducerea de cartele perforate care permiteau aceleiaşi maşini să producă motive de ţesături de o mare varietate, fără să fie nevoie ca reglajele maşinii să fie schimbate, în funcţie de

prezenţa sau absenţa unei găuri într-un anumit loc de pe cartelă, o croşetă articulată traversa sau nu locul respectiv, iar firul de la suveică trecea pe deasupra sau pe dedesubtul firului de urzeală. Pe scurt, era suficient să fie indicat motivul dorit pe cartela perforată, iar maşina se adapta singură.

Pornind de la acest model, Babbage imaginează un calculator mecanic care nu era destinat doar să facă diferite calcule precise, precum adunări sau înmulţiri, ci era capabil şi să-şi adapteze comportamentul şi să realizeze milioane de operaţii diferite, în funcţie de o cartelă perforată care se introducea în maşinărie. Mai exact, această maşină poate realiza toate operaţiile polinomiale, adică efectuarea calculelor care combină într-o ordine oarecare cele patru operaţii de bază plus ridicarea la putere. în acelaşi fel în care pascalina îi permitea utilizatorului să facă
aceeaşi mişcare indiferent de numerele folosite, maşina
lui Babbage permite să se realizeze aceleaşi mişcări indiferent de operaţiile realizate. Nu mai e nevoie, aşa cum se petreceau lucrurile în cazul calculatorului lui Odhner, să răsucim o manivelă în sensul opus, în funcţie de operaţia pe care o dorim, adunare sau scădere. Este suficient să se scrie calculul pe o cartelă perforată, iar maşina se ocupă

de tot. Acest mod revoluţionar de a funcţiona face din
maşina lui Babbage primul ordinator din istorie.

Modul său de funcţionare a adus o nouă provocare. Pentru a efectua un calcul, trebuie să fii capabil să oferi maşinii cartela perforată adecvată. Aceasta din urmă este alcătuită dintr-o succesiune de goluri şi de plinuri pe care mecanismul le va detecta şi care îi vor indica etapă după etapă ce operaţii trebuie să fie efectuate. Deci utilizatorul maşinii trebuie, înainte de a o porni, să traducă acel calcul pe care îl doreşte rezolvat, într-o succesiune de goluri şi plinuri lizibile pentru maşină.

Matematiciana britanică Ada Lovelace[I] este cea care va continua şi va dezvolta acest efort al traducerii. Ea se va apleca asupra funcţionării maşinii şi va înţelege întregul său potenţial, poate chiar mai mult decât şi-ar fi putut imagina Babbage. Mai exact, ea va descrie un cod complex care îi va permite să calculeze şirul lui Bernoulli, care era extrem de util în calculul infinitezimal si care fusese descoperit cu mai mult de un secol înainte de către elveţianul Jacques Bernoulli. în general, acest cod este considerat primul program informatic şi face din Lovelance prima programatoare din istorie.

I Augusta Ada King, Contesă de Lovelace, născută Byron, fata marelui poet George Gordon Noel Byron (Lord Byron). *(N.r.)*

Ada Lovelace a murit în 1852, la vârsta de 36 de ani. Charles Babbage va încerca toată viaţa să construiască maşina sa, dar moare în 1871, înainte ca prototipul să fi fost terminat. Va trebui să aşteptăm secolul XX ca să vedem, în sfârşit, o maşină Babbage funcţionând. A observa unul dintre aceste calculatoare în mişcare are ceva impresionant şi fascinant totodată. Dimensiunile sale impunătoare (aproximativ doi metri înălţime pe trei lăţime) şi baletul coordonat al sutelor de angrenaje care se mişcă şi se răsucesc în pântecele sale ne lasă o impresie uluitoare şi minunată în acelaşi timp.

Prototipul neterminat al savantului britanic şi-a găsit locul în *Science Museum* din Londra, unde îl putem admira şi acum. Un exemplar funcţional, reconstituit la începutul secolului XXI, poate fi văzut şi el la *Computer History Museum* din Mountain View, în California.

Secolul XX va asista la triumful computerelor în asemenea măsură, încât Babbage şi Lovelace nu şi-ar fi putut imagina vreodată. Maşinile de calcul vor beneficia de efectele convergente ale celor mai vechi, dar şi ale celor mai recente matematici.

Pe de o parte, calculul infinitezimal şi numerele imaginare au permis punerea în ecuaţie a fenomenelor electromagnetice care vor da naştere în curând aparatelor electronice. Pe de altă parte, secolul al XlX-lea a asistat la renaşterea întrebărilor cu privire la

fundamentele matematicii, ale axiomelor si ale raţionamentelor elementare ' t t
care permit realizarea demonstraţiilor. Primul punct va oferi maşinilor o infrastructură materială de o rapiditate ieşită din comun, iar cel de-al doilea va permite organizarea eficientă a calculelor elementare pentru a conduce la cele mai complexe rezultate.

Unul dintre principalii artizani ai acestei revoluţii a fost matematicianul britanic Alan Turing. Acesta publică în 1936 un articol în care face o paralelă între posibilitatea din matematică de a demonstra o teoremă si cea din informatică de a face o maşină să calculeze un rezultat. El descrie aici pentru prima dată cum funcţionează o maşină abstractă, care, de altfel, îi va purta numele şi care rămâne până azi folosită pe scară largă în informatica teoretică. Maşina lui Turing este pur imaginară. Matematicianul britanic nu se preocupă de mecanismele concrete cu care ar putea fi construită. El propune doar operaţiile elementare pe care le poate realiza maşina, apoi se întreabă ce este ea capabilă să obţină combinând între ele aceste operaţii. Vedem foarte bine aici analogia care există între un matematician care îşi fixează axiomele, apoi încearcă să deducă teoremele prin combinarea acestora.

Şirul instrucţiunilor care se dau unei maşini pentru a ajunge la un rezultat se numeşte „algoritm”, deformarea latină a numelui „al-Khw rizm „. Trebuie să spunem că algoritmii

informatici se vor inspira foarte mult din procedeele de rezolvare a problemelor deja cunoscute de către antici. Amintiti-vă că al-Khw rizm , în al său *Al-Jabr,* nu ia în considerare doar elementele matematice abstracte, ci oferă şi metodele practice care permit cetăţenilor Bagdadului să găsească soluţia la problemele lor fără să fie nevoie să-şi însuşească întreaga teorie. în acelaşi fel, unui computer nu este nevoie să i se explice teoria pe care, de altfel, ar fi incapabil să o înţeleagă. El are nevoie doar să i se indice care sunt calculele ce trebuie să fie realizate si în ce ordine.

Iată, de exemplu, un algoritm pe care îl putem oferi

unei maşini. Aceasta deţine trei căsuţe de memorie în

; t >

care pot fi înscrise numerele. Aţi putea ghici ce va calcula acest algoritm?

Etapa A: înscrie numărul 1 în căsuţa de memorie numărul 1, apoi treci la etapa B.

Etapa B: înscrie numărul 1 în căsuţa de memorie numărul 2, apoi treci la etapa C.

Etapa C: înscrie suma din căsuţele de memorie numărul 1 si 2 în căsuţa de memorie numărul 3, *t t '*

apoi treci la etapa D.

Etapa D: înscrie numărul din căsuţa de memorie numărul 2 în căsuţa de memorie numărul 1, apoi treci la etapa E.

Etapa E: înscrie numărul de la căsuţa de memorie numărul 3 în căsuţa de memorie numărul 2, apoi treci la etapa C.

Puteţi observa că maşina merge în buclă, deoarece de la etapa E se revine la etapa C. Deci, etapele C, D, E se vor repeta la infinit.

Aşadar ce face maşina aceasta? Trebuie să ne gândim puţin pentru a descifra acest şir de instrucţiuni, dat atât de rece şi fără nicio explicaţie. Totuşi veţi putea înţelege că acest algoritm calculează numere pe care le cunoaştem deja foarte bine, deoarece este vorba despre elemente ale şirului lui Fibonacci[I]. Etapele A şi B determină cele două prime elemente ale şirului: 1 şi 1. Etapa C calculează suma celor doi termeni anteriori. Etapele D şi E decalează apoi rezultatele obţinute în memorie, astfel încât să se poată reîncepe. Dacă observaţi datele care se afişează în mod succesiv în căsuţele de memorie în timpul funcţionării
maşinii, în acest caz veti vedea cum defilează numerele
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 şi aşa mai departe.

Dacă acest algoritm pare relativ simplu, el nu este uşor de citit pentru maşinile lui Turing. Aşa cum au fost definite de autorul lor, de fapt, aceste maşini nu sunt capabile să facă o adunare cum se

I Vă amintiţi, desigur, de primele elemente ale şirului lui Fibonacci care sunt 1 şi 1, apoi fiecare element reprezintă suma celor două precedente. Şiruî începe astfel: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... *(N.a.)*

cere în etapa C. Singurele facultăţi sunt acelea de a scrie, de a citi şi de a se deplasa de la o căsuţă de memorie la alta, urmând instrucţiunile date la fiecare etapă. Totuşi, este posibil să învăţăm adunarea furnizându-i algoritmul prin care cifrele se adaugă rând pe rând şi ţinând cont de elementele de ţinut minte, ca în cazul abacului. Cu alte cuvinte, adunarea nu face parte dintre axiomele maşinii, dar constituie una dintre teoremele căreia trebuie să-i alcătuim algoritmul pentru a putea fi utilizat. Odată scris acest algoritm, este suficient să-l substituim etapei C pentru ca o maşină Turing să poată calcula numerele lui Fibonacci.

Apoi, mărind complexitatea, este posibil să învăţăm o maşină Turing să facă înmulţiri, împărţiri, ridicări la pătrat, extrageri de rădăcină pătrată, să rezolve ecuaţii, să calculeze aproximările lui n, ale rapoartelor trigonometrice sau să realizeze un calcul infinitezimal. Pe scurt, având în vedere că-i furnizăm algoritmii exacţi, o maşină Turing poate să facă tot ceea ce am discutat până acum că a făcut matematica şi apoi să meargă şi mai departe.

Teorema celor patru culori

Luaţi harta unui teritoriu, alcătuită din mai multe regiuni delimitate de frontierele lor. De câte culori, minimum, avem nevoie pentru a putea colora această hartă, astfel încât două regiuni limitrofe să nu aibă niciodată aceeaşi culoare?

în 1852, matematicianul sud-african Francis Guthrie s-a aplecat asupra acestei întrebări şi a emis o conjectură care spune că, orice hartă am alege, este posibil întotdeauna să folosim doar patru culori. După el, foarte mulţi oameni de ştiinţă au încercat să demonstreze enunţul, dar nimeni nu a reuşit să facă acest lucru, timp de mai mult de un secol. Totuşi câteva încercări au fost realizate şi s-a stabilit că toate hărţile se pot reduce la 1 478 de cazuri posibile, fiecare dintre acestea având nevoie de numeroase verificări. Doar că este imposibil pentru o fiinţă umană şi chiar pentru o echipă întreagă să realizeze toate verificările necesare. O viaţă întreagă nu ar fi suficientă pentru a face acest lucru. Imaginaţi-vă puţin disperarea acestor matematicieni care aveau la îndemână metoda care le permitea să susţină sau să infirme conjectura, dar nu o puteau utiliza din cauza unei probleme de timp. în anii 1960, ideea aceasta de a recurge la un computer începe să prindă rădăcini în mintea câtorva cercetători şi, în cele din urmă, în 1976,

doi americani, Kenneth Appel şi Wolfgang Haken, au anunţat că au demonstrat teorema. Cu toate acestea, a fost nevoie de mai mult de 1 200 de ore de calcule şi de 10 miliarde de operaţii elementare făcute de o maşină pentru a o scoate la capăt cu cele 1 478 de hărţi.

Anunţul a avut efectul unei bombe în lumea matematicienilor. Cum ar trebui să fie primită această „demonstraţie" care este de un gen cu totul nou?

Poate fi acceptată validitatea unei demonstraţii atât de lungi, încât nicio fiinţă umană nu o poate citi în întregime? Până unde am putea să avem încredere în maşini?

Aceste întrebări au generat numeroase polemici. Dacă unii spuneau că nu putem fi siguri sută la sută că o maşină nu s-ar putea înşela, alţii, în replică, spuneau că putem să facem aceeaşi observaţie şi despre oameni. Un mecanism electronic valorează mai puţin decât mecanismul biologic al unui *Homo sapiens?* O demonstraţie realizată de o maşină metalică este mai puţin fiabilă decât una realizată de o maşină organică? Adesea am văzut matematicieni, iar câteodată pe unii dintre cei mai mari, că au comis erori care nu au fost detectate decât foarte târziu. Acest lucru ar trebui să ne facă să ne îndoim de fundamentul ansamblului matematic? Fără îndoială că o maşină poate să dea rateuri şi să comită uneori erori, dar dacă fiabilitatea sa este cel puţin egală

cu cea a omului (şi ea este adesea astfel), nu există niciun motiv să-i respingem rezultatele. Astăzi matematicienii au căpătat încredere în computere şi cea mai mare parte dintre ei consideră de acum încolo validă demonstraţia teoremei celor patru culori. Numeroase alte rezultate au fost de atunci dovedite cu ajutorul informaticii. Totuşi acest gen de metodă nu este întotdeauna foarte apreciat. O demonstraţie concisă, realizată de mân
aomului, este adesea considerată mult mai elegantă. Dacă obiectivul matematicii este acela de a înţelege obiectele abstracte pe care le manipulează, demonstraţiile umane sunt mult mai instructive şi permit, în general, ca sensul profund să fie mai bine perceput.

La data de 10 martie 2016, întreaga lume şi-a aţintit ochii pe Seul. Aici are loc cel mai aşteptat meci de joc Go, care pune în competiţie pe cel mai bun jucător din lume, coreeanul Lee Sedol şi computerul AlphaGo. Partida este transmisă în direct pe internet şi pe mai multe canale de televiziune, fiind urmărită de sute de milioane de persoane din întreaga lume. Atmosfera este încordată. Până în acest moment, niciodată un computer nu a bătut o flintă umană la acest nivel.

Go are reputaţia de a fi unul dintre jocurile cel mai dificil de învăţat de către o maşină. Strategia sa cere jucătorilor să aibă o mare doză de intuitie si de creativi-

; t
tate. Or, dacă maşinile sunt foarte bune în a calcula, este foarte greu să găsim algoritmii care să simuleze comportamentele instinctive. Alte jocuri celebre, precum jocul de şah, sunt mult mai mult bazate pe calcul, de aceea computerul Deep Blue a reuşit să îl învingă pe campionul rus de şah Garry Kasparov încă din 1997, într-un meci care a avut şi el un mare răsunet. în legătură cu alte jocuri, precum cel de dame, computerele au ajuns chiar să pună la punct o strategie imbatabilă. Nicio fiinţă umană nu poate spera să învingă la dame un computer. Poate reuşi din când în când să smulgă o remiză, atunci când se joacă impecabil. în marea familie a jocurilor de strategie, Go rămânea deci, în 2016, ultimul care rezista asaltului maşinilor.

La capătul unei ore de joc, ne aflăm la cea de-a treizeci şi şaptea mutare, iar partida pare strânsă. în acest moment AlphaGo îi va uimi pe toţi specialiştii care urmăresc partida. Computerul decide să joace piesa neagră în poziţia 010. Pe internet, comentatorul care analizează şi decriptează mutările în direct face ochii mari, pune piesa pe masa de demonstraţie, apoi o reia ezitând. Reverifică pe ecranul său şi o repune la loc în cele din urmă. „Este o mişcare uimitoare!” exclamă el având un surâs perplex. „Cred că este o eroare”, spune un al doilea comentator. Din cele patru colţuri ale lumii, cei mai mari specialişti ai jocului îşi exprimă aceeaşi

stupefacţie. Oare computerul tocmai făcuse o eroare imensă sau, din contra, una genială? Trei ore şi jumătate şi o sută şaptezeci şi patru de mişcări mai târziu, răspunsul va veni fără drept de apel, odată cu abandonul campionului coreean. Maşina a câştigat!

După meci, epitetele nu conteneau pentru a califica faimoasa mişcare 37. Creativă! Unică! Fascinantă! Nicio fiinţă umană n-ar fi jucat o astfel de mişcare pe care strategiile tradiţionale o considerau proastă, dar care a condus în cele din urmă la victorie. în acest caz se pune întrebarea: cum se poate ca un computer care nu face altceva decât să urmeze un algoritm scris de fiinţe umane să dea dovadă de creativitate?

Răspunsul la această întrebare se află în algoritmii noi de învăţare. Programatorii nu l-au învăţat să joace pur şi simplu. Ei au învăţat computerul cum să înveţe să joace. De-a lungul şedinţelor sale de antrenament, AlphaGo a petrecut mii de ore de joc contra lui însuşi şi a identificat singur mişcările care duc spre victorie. O altă caracteristică a sa este introducerea hazardului în algoritmul lui. Combinaţiile posibile la Go sunt mult prea numeroase pentru a putea fi toate calculate, chiar şi de către un computer. Pentru a remedia acest lucru, AlphaGo trage la sorţi căile pe care

le va explora şi utilizează teoria probabilităţilor. Computerul testează doar un mic eşantion dintre toate combinaţiile posibile şi, în acelaşi fel în care un sondaj estimează caracteristicile unei populaţii întregi pornind de la un grup mic, determină si el mişcările care au mai multe sanse de a-1
;/;
conduce spre victorie. Iată, în linii mari, secretul intuiţiei şi originalităţii lui AlphaGo: acela de a nu gândi în mod sistematic, ci de a cântări viitoarele mutări posibile conform probabilităţii acestora.

Dincolo de aceste jocuri de strategie, computerele care au algoritmi din ce în ce mai complecşi şi performanţi par a fi în măsură astăzi să-i depăşească pe oameni în cea mai mare parte a competenţelor lor. Ele conduc maşini, participă la operaţii chirurgicale, pot crea muzică sau picta tablouri originale. Este greu să ne imaginăm o activitate umană care, din punct de vedere tehnic, să nu poată fi realizată de o maşină pilotată de un algoritm adaptat.

în faţa acestor progrese fulminante, realizate în doar câteva decenii, cine ştie de ce ar putea fi capabile computerele în viitor? Şi cine ştie dacă nu vor fi, într-o zi, în măsură să inventeze singure noi matematici? Pentru moment, jocul matematic rămâne prea complex ca aceste maşini să-şi poată da frâu liber creativităţii. în general, utilizarea lor rămâne tehnică şi

de calcul, dar poate că într-o zi un descendent al lui AlphaGo va produce o teoremă inedită care, precum mişcarea 37 a străbunului său, îi va uimi pe toţi marii savanţi ai planetei. Este greu să dăm un prognostic în legătură cu evoluţia maşinilor de mâine, dar în mod sigur ar fi uimitor ca ele să nu ne surprindă

17
.Matematicile viitorului

Cerul este plumburiu, iar ploaia cadenţează pe acoperişurile din Zürich. Ce vreme tristă în plină vară! Trenul nu ar trebui să mai întârzie mult.

Este duminică, 8 august 1897, iar pe peronul gării un om gânditor aşteaptă sosirea invitaţilor săi. Este Adolf Hurwitz, matematician. German de origine, conduce de cinci ani Catedra de matematică a Şcolii Politehnice Federale de la Zürich. în calitatea aceasta a jucat un rol important în organizarea evenimentului ce se va desfăşura în următoarele trei zile. Trenul care soseşte va lăsa pe peron un eşantion dintre cei mai mari oameni de ştiinţă ai lumii, veniţi din şaisprezece ţări diferite. Mâine se va deschide primul Congres Internaţional al Matematicienilor.

Cei doi iniţiatori ai acestui congres sunt germanii Georg Cantor şi Felix Klein. Primul a devenit celebru descoperind existenţa unor infinituri mai mari decât altele şi punând pe picioare teoria mulţimilor, pentru a le manipula fără a cădea în paradoxuri. Cel de-al doilea este un specialist în structurile algebrice. Chiar dacă Elveţia a fost aleasă ca ţară-gazdă pentru acest prim congres din raţiuni diplomatice, nu este de mirare că iniţiativa a venit dinspre Germania. în secolul al XIX-lea, această ţară a ştiut să se impună ca un nou El Dorado al matematicienilor.

Gottingen, împreună cu prestigioasa sa universitate, este centrul nevralgic unde se întâlnesc cele mai strălucite minţi ale acestei discipline.

Printre cei două sute de participanţi la congres se numără şi mulţi italieni, precum Giuseppe Peano, cunoscut pentru că a definit axiomele moderne ale matematicii, ruşi precum Andrei Markov, ale cărui lucrări au revoluţionat studiul probabilităţilor, sau francezi, precum Henri Poincare[I], care a descoperit printre altele teoria haosului şi a ceea ce vom numi mai târziu „efectul fluture". De-a lungul celor trei zile de congres, toată această lume minunată va putea discuta, schimba idei, crea legături între matematicieni si între domeniile lor de cercetare.

în acest sfârşit de secol XIX, lumea matematică este în plină metamorfoză. Expansiunea, atât geografică, precum şi intelectuală a disciplinei, îi îndepărtează pe savanţi unii de alţii. Matematica este pe cale să devină prea vastă pentru ca un singur individ să o poată cuprinde în întregime. Henri Poincare, cel care va deschide congresul, este uneori considerat ultimul mare savant universal, stăpânind toate domeniile matematicii din epoca sa şi făcându-le să avanseze în mod semnificativ

I L-am întâlnit deja pe Poincare. Lui îi datorăm fraza: „A face matematică înseamnă să dăm acelaşi nume unor lucruri diferite". *(N.a.)*

pe multe dintre acestea. Cu el se stinge specia generaliştilor, pentru a face loc specialiştilor.

Totuşi, ca o reacţie a acestei derive implacabile a continentelor matematice, cercetătorii se vor strădui mai mult ca niciodată să-şi înmulţească ocaziile de a lucra împreună şi de a face din propria disciplină un bloc indivizibil şi de sine stătător. Matematica va intra în secolul XX împreună cu aceste tensiuni între cele două tendinţe contradictorii.

Cel de-al doilea Congres Internaţional al Matematicienilor se va derula la Paris în august 1900, apoi evenimentul îşi va găsi ritmul într-un congres la fiecare patru ani, excepţie făcând doar câteva ediţii anulate din cauza războaielor mondiale. Ultimul la care am asistat a avut loc la Seul de pe 13 până pe 21 august 2014. Cu mai mult de cinci mii de participanţi veniţi din o sută douăzeci de ţări, acest congres a fost cel mai mare organizat vreodată. Următoarea ediţie are loc la Rio de Janeiro în august 2018.

De-a lungul anilor, congresul a generat unele tradiţii. Astfel se face că din 1936 se acordă prestigioasa medalie Fields. Această recompensă, adesea numită Premiul Nobel al matematicii, este cea mai înaltă distincţie a disciplinei. Pe medalie e un portret al lui Arhimede, însoţit de un citat care empatizează cu matematicianul grec: *Transire suum pectus mundoque potiri* („Depăşeşte-ţi propria inteligenţă şi devino stăpânul lumii”).

Profilul lui Arhimede pe medalia Fields

Un alt efect al mondializării matematicii a fost că engleza s-a impus puţin câte puţin ca limbă internaţională a disciplinei. Trebuie spus că încă de la congresul din Paris unii participanţi s-au plâns că rapoartele şi conferinţele care erau exclusiv în limba franceză îngreunau înţelegerea participanţilor străini. Al Doilea Război Mondial şi exodul unei mari părţi dintre creierele europene spre Statele Unite şi marile lor universităţi au contribuit din plin la această mişcare. în zilele noastre, majoritatea articolelor din cercetarea matematică sunt scrise şi publicate în engleză[1].

într-un secol, numărul matematicienilor a crescut şi el în mod considerabil. în 1900 nu existau mai mult de câteva sute, în principal în Europa. Astăzi se pot număra zeci de mii, în toate cele patru colţuri ale lumii. în fiecare zi sunt publicate mai multe zeci de noi articole. Unele estimări spun că acum comunitatea matematică mondială produce în jur de un milion de noi teoreme la fiecare patru ani.

Unificarea matematicii va trece şi ea printr-o reorganizare profundă a disciplinei înseşi. Unul dintre artizanii cei mai activi ai acestei mişcări va fi germanul David Hilbert, profesor la Universitatea din Gottingen. Hilbert este, alături de Poincare, unul dintre cei mai străluciţi şi mai influenţi matematicieni ai începutului de secol XX.

Din 1991, aceste articole care vin din lumea întreagă sunt difuzate liber pe internet, *via* platforma arXiv.org, creată de Universitatea Corneli din SUA. Dacă doriţi să vedeţi cum arată un articol de matematică, faceţi un tur pe această platformă. *(N.a.)*

în 1900, Hilbert va participa la Congresul de la Paris şi va susţine miercuri, 8 august, la Sorbona, o prezentare devenită celebră. Matematicianul german va prezenta aici o listă a marilor probleme nerezolvate care, după el, ar trebui să-i ghideze pe matematicienii secolului care urmează. Matematicienii adoră provocările şi dau curs iniţiativei. Cele douăzeci şi trei de probleme ale lui Hilbert provoacă interesul cercetătorilor şi nu întârzie să se răspândească şi către alte persoane decât cele prezente la congres.

în 2016 rămăseseră încă nerezolvate patru dintre aceste probleme. Printre ele, a opta din lista lui Hilbert, denumită şi Ipoteza lui Riemann, este considerată în general drept cea mai mare dintre conjecturile matematice ale epocii noastre. Este vorba despre găsirea unei soluţii imaginare pentru o ecuaţie pusă la mijlocul secolului al XlX-lea de germanul Bernhard Riemann.

Dacă această ecuaţie este în mod special interesantă, asta se întâmplă pentru că deţine cheia unui mister mult mai vechi: acela al şirului de numere prime studiate încă din Antichitate[1]. Eratostene a fost unul dintre primii care au studiat acest sir în secolul al III-lea înaintea erei noas-

tre. Găsiţi soluţiile ecuaţiilor lui Riemann si veti obţine
> t > > > >
numeroase informaţii asupra numerelor care ocupă un loc central în aritmetică!

Numerele prime sunt numerele care nu pot să se scrie ca o înmulţire de două numere mai mici decât ele însele. De exemplu, 5 este un număr prim, dar nu şi 6, căci 2 x 3 = 6. Şirul numerelor prime începe cu 2, 3, 5, 7, 11, 13, Î 7, 19... *(N.a.)*

Odată enunţate cele douăzeci şi trei de probleme de către Hilbert, el va merge mai departe. în anii care urmează, matematicianul german va pune pe picioare un imens program care urmăreşte să aşeze întreaga matematică pe acelaşi soclu solid, fiabil şi definitiv. Obiectivul său constă în crearea unei teorii unice care să permită înglobarea tuturor ramurilor matematicii. Aduceti-vă aminte că de la Descartes şi coordonatele sale, problemele de geometrie puteau fi exprimate într-un limbaj algebric. într-o anumită măsură, geometria devenise o subdisciplină a algebrei. Dar era, oare, posibil să se extindă acest tip de fuziune la scara întregii matematici? Altfel spus, se putea oare găsi o super- teorie în care toate ramurile matematicii să reprezinte doar cazuri particulare, de la geometrie la probabilităţi, trecând prin algebră sau calculul infinitezimal?

Această superteorie va vedea efectiv lumina zilei sub forma teoriei mulţimilor, propusă la sfârşitul secolului al XlX-lea de Georg Cantor. Mai multe variante de axiomatizare a acestei teorii se

vor schiţa la începutul secolului XX. între 1910 si 1913, britanicii Alfred North Whitehead şi Bertrand Russell publică o lucrare în trei volume, intitulată *Principia Mathematica,* în care enunţă axiomele şi regulile logice pe baza cărora vor recrea de la zero întreaga matematică. Unul dintre pasajele celebre ale cărţii, reprodus pe pagina următoare, se găseşte la pagina 362 din primul volum al ediţiei originale. Whitehead şi Russell, după ce au recreat aritmetica, au ajuns, în sfârşit, la teorema 1 + 1 = 2. Acest lucru i-a amuzat mult pe comentatorii care spuneau că au trebuit să fie sute de pagini şi argumentări aproape imposibil de înţeles pentru iniţiaţi pentru a ajunge, în cele din urmă, la o egalitate atât de elementară. Pentru a ne delecta privirea, iată cum arată în limbajul simbolic al lui Whitehead şi Russell
demonstraţia 1 + 1 = 2.

tM43 | *L ~ . a u fi* 1
Dem.
[+13-'12] = A (1>
I- 1) f «I L'll iî.j. 3
Pn>m rhii pri>pciflL|.ioti it ML**, «lion
ftrilhTmítíL-aL «dJîtioii h«
Jffincd. llwit 1 + I

Nu încercaţi să înţelegeţi ceva din această aglomerare de simboluri. Este absolut imposibil dacă nu aţi citit cele 361 de pagini anterioare![1]

După Whitehead şi Russell, au fost propuse alte variante de îmbunătăţire a axiomelor, iar astăzi majoritatea matematicilor moderne îşi

găsesc perfect fundamentele în cele câteva axiome de bază din teoria mulţimilor.

Unificarea va genera şi o dezbatere lingvistică, deoarece mulţi matematicieni au început în această perioadă să vorbească despre matematică la singular pentru disciplina lor. Nu se mai vorbeşte despre „matematici", ci despre „matematică". Astăzi regăsim încă destui cercetători care militează pentru singular, dar uzul limbii este mult mai puternic, iar în practică se pare că, pentru moment, nu se doreşte renunţarea la acest plural[2].

Şi, chiar dacă le-am citi, tot nu este destul de simplu de înţeles. *(N.a.)*

în limba franceză se vorbeşte în mod curent despre *matematici* în timp ce în limba română termenul uzual este la singular. *(N.t.)*

în ciuda acestei reuşite extraordinare a teoriei mulţimilor, Hilbert nu s-a arătat satisfăcut, deoarece încă persistau câteva îndoieli cu privire la fiabilitatea axiomelor din *Principia Mathematica.* Pentru ca o teorie să poată fi considerată perfectă, este necesar ca ea să satisfacă două criterii: să fie coerentă şi completă!

Prin coerenţă se înţelege că teoria nu admite paradoxuri. Adică nu este posibil să dovedeşti un lucru şi contrariul său în acelaşi timp. De exemplu, dacă una dintre axiome ne-ar permite să demonstrăm că 1 + 1 = 2, iar o alta că 1 +1 = 3, atunci teoria este incoerentă, deoarece se contrazice pe sine. în ceea ce priveşte

completitudinea, aceasta spune că axiomele teoriei sunt suficiente pentru a putea demonstra tot ceea ce este adevărat în cadrul său. De exemplu, dacă o teorie aritmetică nu are suficiente axiome pentru a putea demonstra că 2 + 2 = 4, atunci ea este incompletă.

Este posibil să arătăm că *Principia Mathematica* îndeplineşte aceste două criterii? Am putea fi siguri că nu vom găsi niciodată paradoxuri şi că axiomele sale sunt suficient de precise şi puternice pentru a reuşi să deducem din ele toate teoremele posibile şi imaginabile?

Programul lui Hilbert primeşte o lovitură pe cât de brutală, pe atât de neaşteptată când, în 1931, un tânăr matematician austriac, Kurt Gödel, va publica un articol intitulat *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme (Despre propoziţiile formal indecidabile ale* Principia Mathematica *şi ale sistemelor aferente).* Acest articol demonstra o teoremă extraordinară, afirmând că nu poate să existe o superteorie care să fie totodată coerentă şi completă. Dacă *Principia Mathematica* prezintă coerenţă, atunci în mod necesar există afirmaţii numite indecidabile care nu pot fi în cadrul său nici demonstrabile, nici respinse. Deci, va fi imposibil să determinăm dacă ele sunt adevărate sau false.

Lovitura catastrofală a lui Godel

Teorema incompletitudinii a lui Godel este un monument al gândirii matematice. Pentru a încerca să-i înţelegem principiul general ar trebui să ne aplecăm mai în detaliu asupra modalităţii în care scriem matematica. Iată două afirmaţii elementare de aritmetică:

A. Adunarea a două numere pare va da întotdeauna un număr par.

B. Adunarea a două numere impare va da întotdeauna un număr impar.

Aceste două enunţuri sunt destul de clare, deci ar putea fi fără probleme scrise în limbajul algebric al lui Viete. Gândindu-ne puţin, am putea vedea că prima dintre cele două afirmaţii, notată A, este adevărată, în timp ce a doua, notată B, este falsă, deoarece suma a două numere impare este întotdeauna pară. Ceea ce ne conduce la următoarele alte două enunţuri:

C. Afirmaţia A este adevărată.

D. Afirmaţia B este falsă.

Aceste două noi fraze sunt un pic speciale. Ele nu sunt propriu-zis enunţuri matematice, ci sunt mai degrabă enunţuri care vorbesc despre enunţuri matematice. Propoziţiile C şi D, contrar lui A şi B, nu pot fi scrise *a priori* în limbajul simbolic al lui Viete. Subiectele lor nu sunt nici numere, nici figuri geometrice, nici oricare alt obiect al aritmeticii, al probabilităţilor sau calculului infinitezimal. Ele sunt ceea ce se numesc „enunţuri metamatematice”, adică enunţuri care nu vorbesc despre obiecte matematice, ci despre

matematica însăşi. O teoremă este matematică. Afirmaţia că teorema este adevărată este metamatematică.
Deosebirea poate părea subtilă şi derizorie, deşi printr-o formalizare incredibil de ingenioasă a metamatematicii, Godel a putut să ajungă la teorema sa. Provocarea omului de ştiinţă austriac a fost aceea de a găsi modalitatea în care să scrie enunţurile metamatematice chiar în limbajul matematic. Datorită unui procedeu genial care permite interpretarea enunţurilor ca numere, pe lângă faptul că vorbeşte despre numere, geometrie sau probabilităţi, matematica a devenit capabilă dintr-odată să vorbească despre ea însăşi.
Un lucru care vorbeşte despre el însuşi...?! Nu vă aminteşte de nimic? Aduceţi-vă aminte de faimosul paradox al lui Epimenide! Poetul grec afirmase într-o zi că toţi cretanii sunt mincinoşi. Fiind el însuşi cretan, era imposibil să se determine dacă afirmaţia lui Epimenide era adevărată sau falsă fără a cădea într-o contradicţie. Este precum în cazul şarpelui careşi muşcă coada. Până astăzi, enunţurile matematice s-au ţinut departe de acest gen de afirmaţii autoreferenţiale. Dar cu ajutorul procedeului său, Godel a reuşit să reproducă un fenomen de acelaşi tip chiar în sânul matematicii. Iată enunţul următor:
G. *Afirmaţia G nu este demonstrabilă cu ajutorul axiomelor teoriei.*

Acest enunţ este în mod clar metamatematic, dar prin ingeniozitatea lui Godel, el poate totuşi să fie exprimat în limbajul matematic. Deci s-a făcut posibilă încercarea de a demonstra G cu ajutorul axiomelor teoriei, iar în cazul acesta pot apărea două situaţii.

• Fie este posibil să demonstrăm G, dar în acest caz, pentru că G afirmă că nu este demonstrabilă, înseamnă că se înşală, adică este falsă. Or, dacă este posibil să demonstrăm ceva ca fiind fals înseamnă că întreaga teorie nu se susţine, căci ea nu este coerentă.

• Fie nu este posibil să demonstrăm G, dar în acest caz, ceea ce spune G este adevărat, iar acest lucru semnifică faptul că axiomele noastre sunt incapabile să dovedească o afirmaţie care este totuşi adevărată. Deci teoria este incompletă, deoarece există adevăruri care îi sunt inaccesibile.

Pe scurt, în toate cazurile suntem perdanţi. Fie teoria este incoerentă, fie este incompletă. Teorema de incompletitudine a lui Godel a pus la pământ definitiv cele două visuri ale lui Hilbert şi este inutil să încercăm să ocolim problema schimbând teoria; rezultatul său se aplică nu doar în cazul *Principia Mathematica,* ci şi oricărei alte teorii care ar pretinde că poate să o înlocuiască. Nu poate exista o teorie unică şi perfectă care să permită demonstrarea tuturor teoremelor sale.

Ne rămâne totuşi o mică speranţă. Enunţul G este, desigur, indecidabil, dar trebuie să mărturisim că nu este foarte interesant din punct de vedere matematic. Este mai mult o curiozitate care a fost fasonată pe toate părţile de Godel pentru a putea interveni asupra punctului slab al lui Epimenide. Totuşi era firesc să sperăm ca marile probleme ale matematicii, cele care sunt cu adevărat interesante, să nu cadă în capcana autor eferenţialităţii.

Din nefericire, a trebuit ca încă o dată să i se dea dreptate lui Godel. în 1963, matematicianul american Paul Cohen va demonstra că prima dintre cele douăzeci şi trei de probleme ale lui Hilbert aparţine şi ea acestei stranii categorii de enunţuri indecidabile. Era imposibil să o demonstrăm sau să o respingem pornind de la axiomele din *Principia Mathematica*. Dacă această primă problemă va fi rezolvată într-o zi, în mod sigur se va întâmpla acest lucru în cadrul unei alte teorii. Dar această teorie va conţine, la rândul său, alte puncte slabe şi alte enunţuri indecidabile.Dacă studiile asupra fundamentelor matematicii au ocupat un loc important în secolul XX, acest lucru nu a împiedicat alte ramuri ale acestei discipline să-şi urmeze propriul drum. Este greu să descriem diversitatea matematicilor care s-au dezvoltat în ultimele decenii. Să ne oprim totuşi câteva momente asupra uneia dintre cele mai interesante ale ultimului secol: ansamblul lui Mandelbrot.

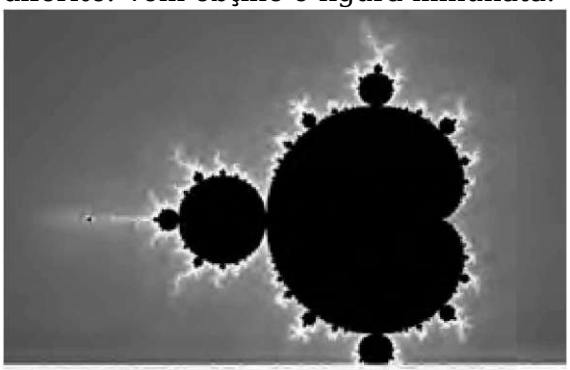
Această creaţie uimitoare a apărut din analiza proprietăţilor anumitor şiruri numerice. Alegeţi un număr, oricare doriţi, apoi construiţi un şir care să aibă ca prim termen pe 0, iar următorii să fie egali cu pătratul termenului precedent, căruia îi adăugăm numărul ales. De exemplu, dacă alegeţi numărul 2, atunci şirul dumneavoastră va începe în felul următor: 0, 2, 6, 38, 1 446... Veţi observa că $2 = O^2 + 2$, apoi $6 = 2^2 + 2$, apoi $38 = 6^2 + 2$, apoi $1\,446 = 38^2 + 2$ şi aşa mai departe. Dacă în locul lui 2 alegeţi numărul -l, atunci veţi obţine şirul 0, -l, 0, -l, 0... Acest şir alternează simplu între 0 şi -l, căci $-l = O^2 - l$ şi $0 = (-1)^2 - l$.

Cele două exemple ne arată că, în funcţie de numărul ales, şirul obţinut poate adopta două comportamente foarte diferite. Este posibil ca el să se îndrepte spre infinit, având valori din ce în ce mai mari, aşa cum este cazul dacă alegem numărul 2. în acelaşi timp, este posibil ca şirul să fie limitat, adică valorile sale să nu se îndepărteze şi să rămână într-o zonă restrânsă, precum este cazul cu numărul -l.

Toate numerele, fie ele întregi, cu virgulă sau chiar imaginare, pot să se aranjeze în acest caz într-una sau alta dintre cele două categorii.

Această clasificare a numerelor poate părea destul de abstractă; pentru a vizualiza mai bine lucrurile, este posibil să ne reprezentăm acest lucru în mod geometric cu ajutorul coordonatelor lui Descartes. într-un plan, aşezăm toate numerele reale pe o axă orizontală aşa cum am

făcut deja înainte[1], apoi numerele imaginare pe o axă verticală. Acum putem să colorăm punctele care aparţin celor două categorii cu două culori diferite. Vom obţine o figură minunată.



Pe această figură, numerele colorate în negru sunt cele care generează şiruri limitate, în timp ce cu gri sunt reprezentate cele care conduc la şiruri ce tind spre infinit.
0 „umbră” albă a fost pusă în spatele figurii negre pentru a putea observa mai bine anumite detalii extrem de fine şi câteodată invizibile cu ochiul liber.

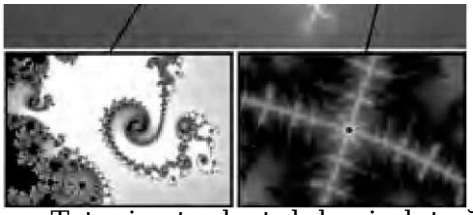
Cum fiecare punct al imaginii corespunde calculului şi studiului unui şir, desenul acestei figuri necesită numeroase calcule. Iată de ce a trebuit să aşteptăm începutul anilor 1980 ca ordinatoarele să ne permită să obţinem reprezentări precise ale acestui ansamblu. Matematicianul francez Benoît Mandelbrot a fost

[1]Zero se află în mijloc, numerele negative la stânga şi numerele pozitive la dreapta. (N.a.)

unul dintre primii care au studiat în detaliu geometria acestei figuri căreia colegii lui au ajuns să-i dea numele său.

Ansamblul lui Mandelbrot este fascinant. Conturul său este alcătuit dintr-o dantelă geometrică incredibil de armonioasă şi de precisă. Dacă măriţi bordura acestei figuri veţi vedea apărând întotdeauna din ce în ce mai multe motive infinit de fine si incredibil de cizelate. în realitate, este absolut imposibil să percepem pe o singură imagine toată bogăţia de forme pe care le presupune ansamblul lui Mandelbrot atunci când îl disecăm în detaliu. Un mic eşantion din aceste detalii este vizibil în figura următoare. Dar ceea ce o face şi mai remarcabilă este dezarmanta simplitate a definiţiei sale. Dacă ar fi trebuit să recurgem la ecuaţii monstruoase pentru a desena această figură, la calcule savante şi confuze sau la construcţii abracadabrante, am fi putut spune: „Desigur, figura este frumoasă, dar ea este absolut artificială şi nu prezintă mare interes”. Dar nu, această figură este pur şi simplu reprezentarea geometrică a proprietăţilor elementare ale şirurilor numerice care se definesc cu ajutorul câtorva cuvinte. Dintr-o regulă foarte simplă a luat naştere această geometrie minunată

.Acest gen de descoperire a relansat inevitabil dezbaterea asupra naturii matematicii: este ea o invenţie umană sau are o existenţă independentă de natura umană? Sunt matematicienii descoperitori sau creatori? La prima vedere, ansamblul lui Mandelbrot pare că pledează în favoarea descoperirii. Dacă figura capătă această formă extraordinară, acest lucru nu se întâmplă pentru că Mandelbrot a luat decizia să o construiască astfel. Matematicianul francez nu a dorit să inventeze o asemenea figură. Ea i s-a impus. Nu ar fi putut fi altceva decât ceea ce este.



Totuşi este destul de ciudat să luăm în considerare

existenţa unui obiect care nu doar că este pur abstract, ci, mai mult, interesul pentru el nu depăşeşte cadrul imaterial al matematicii. Dacă numerele, triunghiurile sau ecuaţiile sunt abstracte, acestea pot fi utile pentru a înţelege lumea reală. Nivelul de abstracţie până în acest moment părea să aibă ceva în comun, chiar de departe, cu universul material. Ansamblul lui Mandelbrot pare să nu mai aibă nicio legătură directă cu lumea materială. Niciun fenomen fizic cunoscut nu are o structură care să-i semene îndeaproape sau de departe. Atunci de ce să ne interesăm de ea? Am putea aşeza descoperirea lui pe acelaşi plan cu descoperirea unei noi planete, în astronomie, sau a unei noi specii de animale, în biologie? Este acesta un obiect care merită efortul să fie studiat pentru el însuşi? Cu alte cuvinte, se află matematica la egalitate cu alte ştiinţe?

Mulţi matematicieni vor răspunde la această întrebare, fără îndoială, cu „Da”. Cu toate acestea, disciplina ocupă un loc extrem de izolat în câmpul cunoaşterii umane. Una dintre

raţiunile acestei singularităţi constă în raportul ambiguu pe care îl are matematica cu frumuseţea obiectelor sale.

Este adevărat că se descoperă lucruri frumoase în aproape toate ştiinţele. Imaginile corpurilor celeste pe care ni le oferă astronomii reprezintă un astfel de exemplu. Suntem uimiţi de forma galaxiilor, de cozile strălucitoare ale cometelor sau de culorile fermecătoare ale nebuloaselor. Desigur că universul este frumos, şi avem norocul să fie aşa, dar trebuie să spunem că nu a fost mereu astfel şi nu am putut face mare lucru în sensul acesta. Astronomii nu au încotro. Stelele sunt ceea ce sunt. Şi ar fi trebuit să fie studiate, chiar dacă ar fi fost urâte. Desi definiţia frumuseţii si cea a urâţeniei sunt *t t t > >* foarte subiective, nu este vorba despre asta aici.

Dimpotrivă, matematicianul pare a fi puţin mai liber. Am văzut deja acest lucru, există o infinitate de modalităţi de definire a structurilor algebrice şi în fiecare dintre acestea există o infinitate de modalităti de a defini ′ şirurile cărora le putem studia proprietăţile. Cele mai multe dintre aceste piste nu conduc spre structuri atât de frumoase precum cele ale lui Mandelbrot. în matematică, libertatea de a alege ceea ce se studiază este mult mai prezentă. în infinitatea de teorii pe care le-am putea explora

le vom alege, cel mai adesea, pe cele pe care le considerăm cele mai elegante.

Acest demers pare să se apropie mai mult de unul artistic. Dacă simfoniile lui Mozart sunt atât de frumoase, acest lucru nu este o întâmplare; sunt aşa deoarece compozitorul austriac a făcut astfel încât ele să fie frumoase. Din infinitatea de piese muzicale ce ar putea fi compuse, majoritatea sunt extrem de urâte. Apăsaţi la întâmplare pe clapele unui pian şi vă veţi convinge de acest lucru! Talentul artistului constă în a găsi în această infinitate aleatorie cele câteva acorduri preţioase care ne vor încânta.

în acelaşi fel, ţine de talentul matematicianului să ştie să găsească, în infinitatea lumii matematice, obiectele cel mai demne de interes. Dacă figura lui Mandelbrot nu ar fi fost asa de frumoasă, în mod clar matematicienii nu s-ar fi interesat atât de mult de ea. Ea ar fi rămas în anonimat printre figurile ignorate, precum toate acele simfonii urâte pe care nimeni nu le va cânta niciodată.

în acest caz, sunt, oare, matematicienii mai mult artişti decât oameni de ştiinţă? Ar însemna să mergem prea departe dacă am afirma acest lucru. Dar are întrebarea un sens? Omul de ştiinţă caută adevărul şi, câteodată, găseşte din întâmplare frumuseţea. Artistul caută frumuseţea şi, câteodată, dă din întâmplare peste adevăr. în ceea ce-l priveşte pe matematician, el pare să

uite uneori că există o diferenţă între cele două. El caută şi una, şi alta în acelaşi timp şi găseşte fără să vrea când pe una, când pe cealaltă. El amestecă adevărul şi frumosul, utilul şi superfluul, ceea ce este obişnuit şi ceea ce este improbabil ca fiind tot atâtea culori care se amestecă pe pânza sa infinită.

El însuşi nu înţelege prea bine ce face. Deseori chiar,
matematica nu-si arată secretele si adevărata sa natură
t >
decât după mult timp de la dispariţia creatorilor săi. Pitagora, Brahmagupta, al-Khw rizm , Tartaglia, Viete şi toţi ceilalţi au inventat matematica fără să se îndoiască de tot ceea ce ea ne permite să facem astăzi. Şi poate că, la rândul nostru, nu ne îndoim deloc de ceea ce ar putea să facă în secolele care vor urma. Doar timpul poate să ia distanţa necesară pentru a aprecia la justa sa valoare opera matematică

.Epilog

Povestea noastră a ajuns la final.

Sau cel puţin la sfârşitul porţiunii care îmi este accesibilă acum, când scriu această carte, la începutul secolului XXI. Dar ce urmează? Este clar că istoria nu s-a încheiat!

Există un lucru pe care trebuie să-l acceptăm în momentul în care ne ocupăm de ştiinţă: cu cât se ştie mai mult despre un subiect, cu atât se

extinde măsura necunoaşterii noastre. Fiecare răspuns pe care îl aducem ridică zece noi alte întrebări. Acest joc fără sfârşit este totodată copleşitor şi încântător. Trebuie să spunem că, dacă ar fi fost posibil să cunoaştem totul, bucuria care ar fi urmat ar fi fost imediat umbrită de imensa disperare de a nu mai avea nimic de descoperit. Dar să nu ne inducem frica! Din fericire, matematica pe care o mai avem de descoperit este fără nicio îndoială cu mult mai cuprinzătoare decât cea pe care o cunoaştem deja!

Cum vor fi matematicile din viitor? Această întrebare ne dă ameţeli. Este uluitor să înaintăm fără frică spre marginea cunoştinţelor noastre şi să aruncăm o privire peste întinderea a tot ceea ce nu cunoaştem. Pentru cel care a gustat cel puţin o dată din savoarea îmbătătoare a noilor descoperiri, chemarea teritoriilor necunoscute este, fără îndoială, mai puternică decât confortul celor cucerite. Cât de fascinantă este matematica până să fie îmblânzită! Şi ce beţie ne dă observarea într-o ceaţă îndepărtată a ideilor brute care se mişcă liber prin savana infinită a ignoranţei noastre! Dar, mai ales, ce beţie ne oferă cele pe care le ghicim a fi sublime şi al căror mister tulbură atât de plăcut imaginaţia noastră! Unele par a fi apropiate. Am putea să credem că este suficient să întindem mâna pentru a le putea culege. Altele sunt atât de îndepărtate, că va fi nevoie de generaţii pentru a

ni le putea apropia. Nimeni nu ştie ce vor descoperi matematicienii secolelor viitoare, dar putem paria că descoperirile vor fi pline de surprize.

Mai 2016. Mă plimb pe aleile *Salonului Culturii şi focurilor Matematice* care se organizează în fiecare an în piaţa Saint-Sulpice, în cel de-al şaselea arondisment al Parisului. Este un loc care îmi place în mod deosebit. Aici se găsesc magicieni care explică doritorilor un truc făcut cu jocul de cărţi, truc ce constă într-o proprietate aritmetică. Există sculptori care dăltuiesc în piatră structuri geometrice inspirate din solidele lui Platon sau inventatori ale căror mecanisme din lemn alcătuiesc maşini de calcul stranii. Puţin mai departe întâlnesc câteva persoane care se ocupă cu calculul razei Pământului, reproducând experienţa lui Eratostene. Apoi văd standul amatorilor de origami, acela al pasionaţilor de jocuri logice şi acela al caligrafilor. Sub un cort se joacă o piesă de teatru în care matematica şi astronomia se amestecă. Se aud explozii de râsete.

Toti aceşti oameni fac matematică! Cu totii inven-
t > >
tează matematică, fiecare în felul lui. Acest jongler va utiliza pentru numărul său figuri geometrice pe care ni-
ciun mare om de stiintă nu le-ar fi considerat demne de

> t
interes. Dar pentru el sunt frumoase, iar mingile pe care le aruncă în aer fac ca ochii trecătorilor să strălucească.
Cred că toate acestea sunt cu mult mai îmbucurătoare decât toate descoperirile marilor savanţi. Există în matematică, până şi în cea mai simplă, o sursă inepuizabilă de uimire si de încântare.
Printre vizitatorii salonului /
se găsesc mulţi părinţi care vin înainte de toate pentru copiii lor şi care, puţin câte puţin, sunt furaţi şi ei de jocul matematic. Niciodată nu-i prea târziu! Matematica are un potenţial formidabil pentru a deveni o disciplină populară şi festivă. Nu e obligatoriu să fii un matematician de geniu pentru a deveni pasionat şi a gusta beţia explorării şi a descoperirilor.

Nu e nevoie de mare lucru pentru a face matematică, iar dacă veţi avea poftă să continuaţi, atunci când ultima pagină a acestei cărţi se va termina, veţi descoperi cu mult mai multe decât ceea ce am putut să vă povestesc. Vă veţi putea trasa propriul drum, vă veţi forma propriile gusturi şi vă veţi urma propriile dorinţe în matematică.

Este suficient să aveţi puţină îndrăzneală, o doză consistentă de curiozitate şi un pic de imaginaţie

!Pentru a merge mai departe

Pentru a continua explorarea matematicii, iată câteva piste care v-ar putea fi utile.

Muzee si evenimente

Departamentul de matematică al *Palais de la Découverte* din Paris (http://www.palais-decouverte.fr) propune activităţi, comunicări şi ateliere pentru marele public. Dacă veţi trece pe aici, nu rataţi să faceţi un tur prin faimoasa sală ττ. Tot la Paris, *Cité des Sciences et de l'Industrie* (http://www.cite-sciences.fr) deţine, de asemenea, un spaţiu dedicat matematicii.

De mici dimensiuni, dar la fel de atrăgătoare sunt: *La Maison des Maths et de l'Informatique* la Lyon (http.7/ www.mmi-lvon.fr). Asociaţia *Fermât Science* (http.7/www. fermat-science.com) care propune activităţi în satul natal al lui Pierre de Fermât în La Beaumont-de-Lomagne, în apropiere de Toulouse; *l'Exploradôme* (http://www.explora- dome.fr) în Vitry-sur-Seine sau la *Maison des Maths* (http:// maisondesmaths.be) din Quaregnon, în Belgia.

Iar dacă veţi merge în altă ţară decât Franţa, aveţi *Mathematikum* (http://www.mathematikum.de) în Gießen, Germania, sau *MoMaths* (http://momath.org) din New York, în Statele Unite, ambele muzee consacrate exclusiv matematicii.

Toate aceste locuri sunt deosebit de interactive, iar partea frumoasă e că poţi participa la o mulţime de evenimente de toate felurile.

Pe lângă aceste locuri care se pot vizita permanent, trebuie să adăugăm evenimentele punctuale, precum *Salon Culture & Jeux*

Mathématiques (www.cijm.org), organizat în fiecare an la sfârşitul lunii mai la Paris. *La Fête de la Science* (http://www.fetedelascience.fr). care se ţine în octombrie, şi *La Semaine des Mathématiques,* din luna martie, dovedesc că de la un an la altul evenimentele se îmbogăţesc aproape peste tot în Franţa. *La Semaine des Mathématiques* se desfăşoară, de regulă, în jurul zilei de 14 martie, de ziua lui **ττ**, şi reprezintă o mare sărbătoare mondială a matematicii.

Cărţi

Există foarte multe lucrări care au ca subiect matematica şi o studiază la diverse niveluri de popularizare şi de specializare. Cele câteva sugestii pe care vi le dau în continuare nu sunt cu siguranţă exhaustive.

Martin Gardner, care a ţinut între anii 1956 şi 1981 rubrica de matematică din *Scientific American,* este un personaj de neocolit în matematica recreativă. Culegerile sale, precum şi numeroasele cărţi de magie matematică sau de enigme sunt de referinţă în domeniu. Printre clasici, îl putem cita şi pe Yakov Perelman şi faimoasa sa carte *Oh, les maths* sau pe Raymond Smullyan, cu cărţile sale de logică, precum *Le livre qui rend fou* sau *What is the Name ofThis Book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles.*

Dintre autorii cei mai recenţi, recomandăm cărţile

lui Ian Stewart, precum *Mon cabinet de curiosités mathématiques,* pe Marcus Du Sautoy cu *La symétrie ou les maths au clair de lune,* sau pe cele ale lui Simon Singh, precum *Cartea codurilor* sau *Les Mathématiques des Simpson.* Cartea *Le beau livre des math* a lui Clifford A. Pickover ne oferă o panoramă cronologică ilustrată a celor mai spectaculoase comori ale istoriei matematicii.

Dintre autorii francezi, îl citǎm în mod special pe Denis Guedj, autor a numeroase lucrări, printre care faimoasa carte poliţistă istorico-matematică *Teorema papagalului.* Jean-Paul Delahaye este şi el un autor inspirat în cărţile *Le Fascinant Nombre n* sau *Merveilleux nombres premiers.*

Venind dintr-un alt gen, *Teorema vie*, de Cédric Villani, transportă cititorul direct în inima cercetării matematice de astăzi, povestind cum ia naştere o teoremă.

Resurse internet

Site-ul *Image des mathématiques* (http://images.math. cnrs.fr) ne propune în mod regulat articole de popularizare a cercetărilor actuale scrise de matematicieni.

Nu rataţi blogul *Choux romanesco, Vache qui rit et Intégrale curviligne* (http.7/el)jdx.canalblog.com) al lui El Jj, ce conţine articole extrem de savuroase.

Filmele *Dimensions* (http://www.dimensions-math. org) şi *Chaos* (http://www.chaos-math.org). realizate de Jos Leys, Aurélien Alvarez şi Étienne Ghys vă vor face să intraţi în lumea celei de-a patra dimensiuni şi a haosului cu ajutorul unor animaţii extraordinare.

De câţiva ani, canalele de popularizare ştiinţifică se înmulţesc, în special pe YouTube. Legat de matematică, putem accesa videourile lui El Jj care completează blogul său, despre care am vorbit mai sus, precum şi canalele *ScienceéAll, La statistique expliquée à mon chat* sau *Passe-Science.*

Platforma *Vidéosciences* (http://videosciences.ca- fe-sciences.org) conţine mai mult de o sută de canale din toate domeniile ştiinţifice.

> t

Din spaţiul anglofon citǎm, printre altele, canalul *Numberphile* sau videourile lui *Vi Heart.* Totodată, veţi putea să căutaţi videourile conferinţelor pentru publicul larg, oferite de cercetătorii din matematică. Matematicienii Étienne Ghys, Tadashi Tokieda sau Cédric Villani sunt extraordinari în acest sens

.Bibliografie

Am inclus în bibliografie principalele documente care m-au ajutat în scrierea acestei cărţi. Atenţie, unele pot fi foarte tehnice! Lista pe care am dat-o este în ordinea alfabetică a autorilor.

Legendă:

Epoca:

A: Antichitate M: Evul Mediu

R: Renaştere

/

E: Epocile Modernă şi Contemporană *Tema:*

G: Geometrie N: Numere/Algebră P:

Analiză/Probabilităţi L: Logică

S: Alte stiinte

> t

[EP] M.G. Agnesi, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral,* Claude-Antoine Jombert Libraire, 1775.

D. J. Albers, G.L. Alexanderson et C. Reid, *International Mathematical Congresses, an illustrated history,* Springer-Verlag, 1987.

[AG] Archimède, *Oeuvres d'Archimède avec un commentaire par F. Peyrard,* François Buisson Libraire-Éditeur, 1854. [AL] Aristote, *Physique,* GF-Flammarion, 1999. [EP] S. Banach şi A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes,* Fundamenta Mathematicae, 1924.

[E] B. Belhoste, *Paris savant,* Armand Colin, 2011.

[EP] J. Bernoulli, *L'Art de conjecturer,* Imprimerie G. Le Roy, 1801.

[G] J.-L. Brahem, *Histoires de géomètres et de géométrie,* Editions le Pommier, 2011.

[MN] H. Bravo-Alfaro, *Les Mayas, un lien fort entre Maths et Astronomie,* Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[N] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations,* The open court company, 1928.
[RN] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna),* Dover publications, 1968.
[RN] L. Charbonneau, *Il y a 400 ans mourait sieur François Viète, seigneur de la Bigotière,* Bulletin AMQ, 2003.
[AG] K. Chemla, G. Shuchun, *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires,* Dunod, 2005.
[AG] K. Chemla, *Mathématiques et culture, Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes connues - La mathématiques, les lieux et les temps,* CNRS Éditions. 2009.
[AG] M. Clagett, *Ancient Egyptian Science A Source Book,* American Philosophical Society, 1999.
[EG] R. Cluzel et J.-P. Robert, *Géométrie - Enseignement technique,* Librairie Delagrave, 1964.
Colectiv - Department of Mathematics - North Dakota State University, *Mathematics Genealogy Project,* https://genealogy. math.ndsu.nodak.edu/, 2016.
[N] J.H. Conway et R. . Guy, *The book of Numbers,* Springer, 1996.
[E] G.P. Curbera, *Mathematicians of the world, unite !:The International Congress of Mathematicians-A Human Endeavor,* CRC Press, 2009.
J.-P. Delahaye, *Le Fascinant Nombre n,* Pour la science - Belin, 2001.
A. Deledicq *et alii, La Longue Histoire des nombres,* ACL - Les éditions du Kangourou, 2009.
[AG] A. Deledicq et F. Casiro, *Pythagore & Thalès,* ACL - Les éditions du Kangourou. 2009.
A. Deledicq, J.-C. Deledicq et F. Casiro, *Les Maths et la Plume,* ACL - Les éditions du Kangourou, 1996.
[M] A. Djebbar, *Bagdad, un foyer au carrefour des cultures,* Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[M] A. Djebbar, *Les Mathématiques arabes, L'âge d'or des sciences arabes* (colectiv), Actes Sud - Institut du Monde Arabe, 2005.
[M] A. Djebbar, *Panorama des mathématiques arabes-La mathématiques, les lieux et les temps,* CNRS Éditions, 2009.
[A] D.W. Engels, *Alexander the Great and the Logistics of the Macedonian Army,* University of California Press, 1992.
[AG] Euclide, *Les Quinze Livres des Éléments géométriques d'Eu- clide,* Traduction par D. Henrion, Imprimerie Isaac Dedin, 1632.
[MN] L. Fibonacci, *Liber Abaci,* extrase traduse de A. Schărlig, https://www.bibnum.education.fr/sites/ default/files/texte_fi- bonacci.pdf
[ES] Galilée, *The Assayer,* traducere în engleză de S. Drake.
http://www.princeton.edu/~hos/h291/assayer.htm
[MG] R.P. Gomez *et alii, La Alhambra,* Epsilon, 1987.
[N] D. Guedj, *Zéro,* Pocket, 2008.
B. Hauchecorne şi D. Surreau, *Des mathématiciens de A h* Z, Ellipses, 1996.
B. Hauchecorne, *Les Mots & les Maths,* Ellipses, 2003.
[E] D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques - Les 23 problèmes,* Éditions Jacques Gabay, 1990.
[EL] D. Hofstadter, *Gôdel Esher Bach,* Dunod, 2000.
[AN] J. H0yrup, *L'Algèbre au temps de Babylone,* Vuibert - Adapt Snes, 2010.
[AN] J. Hoyrup, *Les Origines - La mathématiques, les lieux et les temps,* CNRS Éditions, 2009.
[A] Jamblique, *Vie de Pythagore,* La roue à livres, 2011.
[N] M. Keith după E. Poe, *Near a Raven,* http:// cadaeic.net/ naraven.htm, 1995.
[MN] A. Keller, *Des devinettes mathématiques en Inde du Sud,* Maths Express au carrefour des cultures, 2014.

[MN] M. al-Khw rizm , *Algebra,* traducere în engleză de Frederic Rosen, Oriental Translation Fund, 1831.
[A] D. Laërce, *Vie, doctrines et sentences des philosophes illustres,* GF-Flammarion. 1965.
[EP] M. Launay, *Urnes Interagissantes,* Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, 2012.
[EG] B. Mandelbrot, *Les Objets fractals,* Champs Science, 2010.
S. Mehl, *ChronoMath, chronologie et dictionnaire des mathématiques,* http://serge.mehl.free.fr/ [M] M. Moyon, *Traduire les mathématiques en Andalus au XIIe siècle*, Maths Express au carrefour des cultures, 2014.
[EL] E. Nagel, J.R. Newman, K. Gödel si J.-Y. Girard, *Le Théorème de Gödel,* Points. 1997.
[RN] P.D. Napolitani, La *Renaissance italienne - La mathématiques, les lieux et les temps,* CNRS Éditions, 2009.
[ES] I. Newton, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle,* Dunod, 2011.
M. du Sautoy, *La Symétrie ou les Maths au clair de lune,* Éditions Héloïse d>Ormesson, 2012.
[EP] B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique,* Guillaume Desprez, 1665.
A. Peters, *Histoire mondiale synchronoptique,* Éditions académiques de Suisse - Bâle.
[AG] Platon, *Timée,* GF-Flammarion, 1999.
[MN] K. Plofker, *L'Inde ancienne et médiévale - La mathématique, les lieux et les temps,* CNRS Éditions, 2009.
[E] H. Poincaré, *Science et Méthode,* Flammarion, 1908.
[EP] G. Pölya, *Sur quelques points de la théorie des probabilités,* Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1930.
[AN] C. Proust, *Brève chronologie de l'histoire des mathématiques en Mésopotamie,* CultureMATH,http://culturemath.ens.

fr/content/brève-chronologie-delhistoire-des-mathématiqu- es-en-mésopotamie, 2006.
[AN] C. Proust, *Le Calcul sexagésimal en Mésopotamie,* CultureMATH, http://culturemath.ens.fr/content/le-calcul-sexa-gésimal-en-mésopotamie, 2005.
[AN] C. Proust, *Mathématiques en Mésopotamie, Images des mathématiques,* http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-en-Mesopotamie.html, 2014.
[A] Pythagore, *Les Vers d'or,* Éditions Adyar, 2009.
[EL] B. Russell si A. N. Whitehead, *Principia Mathematica,* Merchant Books, 2009.
[AN] D. Schmandt-Besserat, From accounting to Writing, în B.A. Rafoth si D.L. Rubin, *The Social Construction of Written Communication,* Ablex Publishing Co, Norwood, 1988.
[AN] D. Schmandt-Besserat, *The Evolution of Writing,* Site-ul personal al autorului https://sites.utexas.edu/dsb/, 2014.
[RN] M. Serfati, *Le Secret et la Règle, La recherche de la vérité* (colectiv), ACL - Les éditions du Kangourou, 1999.
[EL] R. Smullyan, *Les Théorèmes d'incomplétude de Gôdel,* Dunod, 2000.
[EL] R. Smullyan, *Quel est le titre de ce livre ?,* Dunod, 1993.
[N] Stendhal, *Vie de Henry Brulard,* Folio classique, 1973.
[EL] A. Turing, *On computable numbers with an application to the entscheidungsproblem,* Proceedings of the London Mathematical Society, 1936.
[RN] F. Viète, *Introduction en Vart analytique,* traducere în franceză de A. Vasset, 1630.